Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1900.

Von der
Akademie der Wissenschaften, Göttingen
genehmigter Nachdruck
KRAUS REPRINT LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1967

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1900.

Ueber die Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden.

Von

L. Krüger in Potsdam.

Mit 3 Textfiguren.

Vorgelegt von Herrn F. R. Helmert in Potsdam durch den vorsitzenden Sekretär in der Sitzung am 3. Februar 1900.

Eine Ausgleichung eines Rückwärtseinschnittes mit Benutzung von Bedingungsgleichungen ist bereits 1885 von dem verstorbenen Professor O. Börsch im Anhange seiner Geodätischen Coordinaten[1]), S. 115 u. f., gegeben worden. Indem er einen Fixpunkt mit den übrigen $n-1$ Fixpunkten und dann sämmtliche mit dem Punkte, auf dem die Beobachtungen nach den Fixpunkten stattgefunden haben, verbindet, ergeben sich $n-1$ Dreiecke. Wenn nun in irgend einem Dreieck dem Winkel, welcher der allen gemeinschaftlichen Seite gegenüber liegt, eine fingirte Verbesserung beigelegt wird, so läßt sich in jedem Dreieck nach dem Sinussatze diese Seite zwischen dem Beobachtungspunkt und dem Anfangs-Fixpunkt, von dem die gegebenen Verbindungen nach den Fixpunkten gehen, ausdrücken. Der Logarithmus derselben stellt sich als lineare Funktion der Verbesserungen beobachteter Richtungen und der fingirten Verbesserung dar, deren Koefficienten die Differenzen für 1″ vom log sin der betreffenden Winkel sind. Zieht man nun eine Gleichung, etwa die erste, von den übrigen ab, so ergeben sich $n-2$ Gleichungen — die nichts anderes sind als die Seitengleichungen um den zum Anfangspunkt gewählten Fixpunkt —, und wenn man aus ihnen noch die fingirte Verbesserung eliminirt: $n-3$ Gleichungen, die nur Verbesserungen beobachteter Richtungen enthalten. Nachdem durch die Ausgleichung die Werthe

1) Anleitung zur Berechnung geodätischer Coordinaten. Von Prof. Dr. Otto Börsch. Mit zwei Figurentafeln. Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Cassel, Verlag von A. Freyschmidt, 1885.

Es sei nun Q' ein durch irgend welche Rechnung gefundener, in der Nähe von Q gelegener Punkt; die Azimute auf ihm nach den Fixpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ seien $t_1+\tau_1$, $t_2+\tau_2$, $t_3+\tau_3, \ldots$, $t_n+\tau_n$. Die τ sollen kleine Größen erster Ordnung im Vergleich mit den t sein. Stellt man nun mit dem Punkt P_1 als Pol für die Vierecke $P_1 P_2 P_3 Q'$, $P_1 P_2 P_4 Q', \ldots, P_1 P_2 P_n Q'$ die Seitengleichungen auf, so ergiebt sich

$$\frac{s_2}{s_3}\,\frac{\sin(t_3-t_1+\tau_3-\tau_1)\sin(t_2-A_2+\tau_2)}{\sin(t_3-A_3+\tau_3)\sin(t_2-t_1+\tau_2-\tau_1)} = 1$$

$$\frac{s_2}{s_4}\,\frac{\sin(t_4-t_1+\tau_4-\tau_1)\sin(t_2-A_2+\tau_2)}{\sin(t_4-A_4+\tau_4)\sin(t_2-t_1+\tau_2-\tau_1)} = 1$$

und allgemein

$$1)\qquad \frac{s_2}{s_i}\,\frac{\sin(t_i-t_1+\tau_i-\tau_1)\sin(t_2-A_2+\tau_2)}{\sin(t_2-t_1+\tau_2-\tau_1)\sin(t_i-A_i+\tau_i)} = 1. \quad (i=3\ldots n)$$

Entwickelt man diese Gleichung, nachdem man zu Logarithmen übergegangen ist, so erhält man, wenn man sich auf Glieder erster Ordnung beschränkt:

$$C_{i-2}+\tau_i\{\operatorname{cotg}(t_i-t_1)-\operatorname{cotg}(t_i-A_i)\}+\tau_2\{\operatorname{cotg}(t_2-A_2)-\operatorname{cotg}(t_2-t_1)\}$$
$$+\tau_1\{\operatorname{cotg}(t_2-t_1)-\operatorname{cotg}(t_i-t_1)\} = 0,$$

wobei

$$2)\qquad C_{i-2} = \frac{\varrho''}{\text{Mod.}}\log\frac{s_2}{s_i}\,\frac{\sin(t_i-t_1)\sin(t_2-A_2)}{\sin(t_2-t_1)\sin(t_i-A_i)}$$

$$(i=3\ldots n),\qquad \varrho''=206\,264{,}8,\qquad \text{Mod.}=0{,}434\,2945$$

ist. Die τ sind in Sekunden gegeben.

Hieraus folgt weiter

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} &C_{i-2}\sin(t_i-t_1)\sin(t_2-t_1)+\tau_i\,\frac{\sin(t_1-A_i)}{\sin(t_i-A_i)}\,\sin(t_2-t_1)\\ &+\tau_2\,\frac{\sin(t_1-A_2)}{\sin(t_2-A_2)}\,\sin(t_1-t_i)+\tau_1\sin(t_i-t_2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber

$$4)\qquad \frac{r_\lambda}{r_1} = \frac{\sin(t_1-A_\lambda+\tau_1)}{\sin(t_\lambda-A_\lambda+\tau_\lambda)}, \qquad (\lambda=1\ldots n)$$

wenn r_λ die Entfernung des Punktes Q' vom Punkte P_λ bezeichnet.

Da die Gleichung (3) die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, so kann man in den Koefficienten der τ

$$\frac{r_\lambda}{r_1} = \frac{\sin(t_1-A_\lambda)}{\sin(t_\lambda-A_\lambda)}$$

setzen. Damit erhält man aus (3):

5) $K_{i-2} + r_1 \sin(t_i - t_2) \cdot \tau_1 + r_2 \sin(t_1 - t_i) \cdot \tau_2 + r_i \sin(t_2 - t_1) \cdot \tau_i = 0,$
$(i = 3 \ldots n)$

wobei

6) $$K_{i-2} = C_{i-2} \cdot r_1 \sin(t_1 - t_i) \sin(t_1 - t_2)$$

ist.

Bei der Bezifferung der Fixpunkte ist darauf zu achten, daß $t_2 - t_1$ nicht 0^0 oder 180^0 wird, falls dies überhaupt möglich sein kann.

Setzt man

7) $$\left\{\begin{aligned} r_1 \sin(t_{\nu+2} - t_2) &= \alpha_\nu \\ r_2 \sin(t_1 - t_{\nu+2}) &= \beta_\nu \\ r_{\nu+2} \sin(t_2 - t_1) &= \gamma_\nu, \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

so kann man für die Gleichungen (5) auch schreiben:

8) $$\alpha_\nu \cdot \tau_1 + \beta_\nu \cdot \tau_2 + \gamma_\nu \cdot \tau_{\nu+2} + K_\nu = 0. \qquad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

§ 2.

Anstatt die Konstanten K_ν vermittelst der Ausdrücke

$$K_\nu = r_1 \sin(t_{\nu+2} - t_1) \sin(t_2 - t_1) \cdot C_\nu$$

$$C_\nu = \frac{\varrho''}{\text{Mod.}} \log \frac{s_2}{s_{\nu+2}} \frac{\sin(t_{\nu+2} - t_1) \sin(t_2 - A_2)}{\sin(t_2 - t_1) \sin(t_{\nu+2} - A_{\nu+2})}$$
$$(\nu = 1 \ldots n-2)$$

zu berechnen, kann man sich auch, wenn die τ bekannt sind, also die Lage von Q' bestimmt ist, der Gl. (8) des § 1 bedienen. Nach dieser ist

1) $$-K_\nu = \alpha_\nu \tau_1 + \beta_\nu \tau_2 + \gamma_\nu \tau_{\nu+2};$$

τ_λ ist die Differenz des berechneten Azimutes der Richtung $Q' P_\lambda$ und der Annahme t_λ dafür. Sind x', y' die rechtwinkligen Koordinaten von Q' und x_λ, y_λ die rechtwinkligen Koordinaten des Fixpunktes P_λ, so ist

$$r_\lambda \cos(t_\lambda + \tau_\lambda) = x_\lambda - x', \quad r_\lambda \sin(t_\lambda + \tau_\lambda) = y_\lambda - y'$$

$$\text{tang}(t_\lambda + \tau_\lambda) = \frac{y_\lambda - y'}{x_\lambda - x'}.$$

Nimmt man, um den beobachteten Richtungssatz näherungsweise zu orientiren, für das Azimut der Anfangsrichtung denjenigen Werth

an, der sich für $Q' P_1$ ergiebt, so ist $\tau_1 = 0$. Wenn man nun die Lage von Q' vermittelst der Beobachtungswerthe für die Richtungen nach P_1, P_2, P_3 abgeleitet hat, so ist auch $\tau_2 = \tau_3 = 0$.

In diesem Falle giebt die erste Seitengleichung

$$\frac{s_2}{s_3} \frac{\sin(t_3 - t_1) \sin(t_2 - A_2)}{\sin(t_2 - t_1) \sin(t_3 - A_3)} = 1$$

oder

$$2) \qquad \frac{\sin(t_2 - A_2)}{\sin(t_3 - A_3)} = \frac{s_3}{s_2} \frac{\sin(t_2 - t_1)}{\sin(t_3 - t_1)} = \operatorname{tang} \lambda;$$

hieraus erhält man

$$3) \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(t_2 + t_3 - [A_2 + A_3]) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(t_3 - t_2 - [A_3 - A_2]) \operatorname{tang}(45^0 + \lambda).$$

Damit findet man zunächst t_2 und t_3 und dann weiter t_1 und die übrigen t durch Anbringen der beobachteten Richtungsdifferenzen gegen t_2 oder t_3.

Ferner ist jetzt, außer $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$,

$$4) \qquad \begin{aligned} \tau_4 &= \text{Azimut } Q' P_4 - t_4 \\ \tau_5 &= \quad " \quad Q' P_5 - t_5 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \tau_n &= \quad " \quad Q' P_n - t_n, \end{aligned}$$

und für die K hat man

$$5) \qquad \begin{aligned} K_1 &= \quad 0 \\ K_2 &= -\gamma_2 \tau_4 \\ K_3 &= -\gamma_3 \tau_5 \\ &\vdots \qquad \vdots \\ K_{n-2} &= -\gamma_{n-2} \tau_n. \end{aligned}$$

§ 3.

Die plausibelsten Werthe der Verbesserungen der gemessenen Richtungen auf dem Beobachtungspunkte Q seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$; ferner sei u die Verbesserung der Orientirung. Dann sind also die Azimute der Richtungen nach den Fixpunkten auf Q:

$$\begin{gathered} t_1 + \varrho_1 + u \\ t_2 + \varrho_2 + u \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ t_n + \varrho_n + u. \end{gathered}$$

An Stelle von u könnte man auch eine andere Unbekannte einführen, indem man z. B. $u' = \varrho_1 + u$ setzte. u' würde dann die

durch die Ausgleichung angezeigte Verbesserung des Winkels $P_2 P_1 Q$ bedeuten.

Um die zwischen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ und u bestehenden Bedingungsgleichungen zu erhalten, hat man in den $n-2$ Gleichungen (8), § 1,

$$\tau_1 = \varrho_1 + u, \ \tau_2 = \varrho_2 + u, \ \ldots, \ \tau_n = \varrho_n + u$$

zu setzen. Dadurch erhält man die folgenden Gleichungen, wenn für

1) $$\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu = \sigma_\nu$$

geschrieben wird:

2) $$\alpha_\nu \varrho_1 + \beta_\nu \varrho_2 + \gamma_\nu \varrho_{\nu+2} + \sigma_\nu u + K_\nu = 0. \quad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

Gleichzeitig muß

3) $$p_1 \varrho_1^2 + p_2 \varrho_2^2 + \cdots + p_n \varrho_n^2 = \text{min.}$$

werden.

Wenn man die Bedingungsgleichungen in der angegebenen Form, Gl. (2), benutzt, so hat die Weiterentwicklung nach den von Herrn Prof. Helmert in seiner Ausgleichungsrechnung[1]), S. 215 u. f., gegebenen Vorschriften zu erfolgen. Siehe weiterhin § 4, II.

Man kann aber auch aus den Bedingungsgleichungen (2) andere herstellen, indem man die Unbekannte u aus ihnen eliminirt. Die Elimination von u möge vermittelst der Gleichung

2*) $$\alpha_1 \varrho_1 + \beta_1 \varrho_2 + \gamma_1 \varrho_3 + \sigma_1 u + K_1 = 0$$

geschehen. Alsdann gehen die Bedingungsgleichungen über in:

$$(\alpha_1 \sigma_\nu - \alpha_\nu \sigma_1) \varrho_1 + (\beta_1 \sigma_\nu - \beta_\nu \sigma_1) \varrho_2 + \gamma_1 \sigma_\nu \varrho_3 - \gamma_\nu \sigma_1 \varrho_{\nu+2} + K_1 \sigma_\nu - K_\nu \sigma_1 = 0. \quad (\nu = 2 \ldots n-2)$$

Setzt man

4) $$\begin{aligned} \alpha_1 \sigma_{\lambda+1} - \alpha_{\lambda+1} \sigma_1 &= a_\lambda \\ \beta_1 \sigma_{\lambda+1} - \beta_{\lambda+1} \sigma_1 &= b_\lambda \\ \gamma_1 \sigma_{\lambda+1} \qquad &= c_\lambda \\ - \gamma_{\lambda+1} \sigma_1 &= d_\lambda, \end{aligned}$$

wo also

5) $$a_\lambda + b_\lambda + c_\lambda + d_\lambda = 0$$

ist, und ferner

6) $$K_1 \sigma_{\lambda+1} - K_{\lambda+1} \sigma_1 = -(a_\lambda \tau_1 + \beta_\lambda \tau_2 + c_\lambda \tau_3 + d_\lambda \tau_{\lambda+3}) = l_\lambda,$$

1) Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente von F. R. Helmert. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1872.

so lauten die neuen Bedingungsgleichungen:

7) $$a_\lambda \varrho_1 + b_\lambda \varrho_2 + c_\lambda \varrho_3 + d_\lambda \varrho_{\lambda+3} + l_\lambda = 0. \qquad (\lambda = 1 \ldots n-3)$$

Die folgende Entwicklung, § 4, soll nun unter Zugrundelegung der Gleichungen (7) bezw. (2*) erfolgen.

Es sei hier noch bemerkt, daß es bei Zahlenrechnungen meistens vortheilhaft ist, die Bedingungsgleichungen, d. h. also die α, β, γ durch passend gewählte Konstanten zu dividiren, um späterhin für die Korrelaten nicht zu kleine Werthe zu erhalten.

In dem Falle, daß Winkelbeobachtungen vorliegen, kann man die Gl. (7) leicht in Winkelverbesserungen überführen. Sind z. B. die Verbesserungen der Winkel $P_1 Q P_2$, $P_2 Q P_3$, $P_3 Q P_{\lambda+3}$ der Reihe nach $w_{1\cdot 2}$, $w_{2\cdot 3}$, $w_{3\cdot\lambda+3}$, so erhält man aus (7)

$$-a_\lambda w_{1\cdot 2} + (c_\lambda + d_\lambda) w_{2\cdot 3} + d_\lambda w_{3\cdot\lambda+3} + l_\lambda = 0.$$

§ 4.

I. Bezeichnet $\varkappa_\lambda$ die zur Gleichung (7) des vorigen § gehörige Korrelate, so geben die Bedingungen des Minimums von $\sum_{i=1}^{n} p_i \varrho_i^2$ für die Verbesserungen die nachstehenden Ausdrücke:

1) $$\begin{aligned} p_1 \varrho_1 &= a_1 \varkappa_1 + a_2 \varkappa_2 + \cdots + a_{n-3} \varkappa_{n-3} \\ p_2 \varrho_2 &= b_1 \varkappa_1 + b_2 \varkappa_2 + \cdots + b_{n-3} \varkappa_{n-3} \\ p_3 \varrho_3 &= c_1 \varkappa_1 + c_2 \varkappa_2 + \cdots + c_{n-3} \varkappa_{n-3} \\ p_4 \varrho_4 &= d_1 \varkappa_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_5 \varrho_5 &= \cdot \quad d_2 \varkappa_2 \quad \cdot \quad \cdot \\ &\vdots \\ p_n \varrho_n &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad d_{n-3} \varkappa_{n-3}. \end{aligned}$$

Infolge der Gleichung (5), § 3, ist hiernach

2) $$\sum_{i=1}^{n} p_i \varrho_i = 0.$$

Wird

3) $$f_{\lambda\cdot\mu} = \frac{a_\lambda a_\mu}{p_1} + \frac{b_\lambda b_\mu}{p_2} + \frac{c_\lambda c_\mu}{p_3} = f_{\mu\cdot\lambda}$$

gesetzt, so ergeben sich die Normalgleichungen:

4) $$\begin{aligned} &\left(f_{1\cdot 1} + \frac{d_1^2}{p_4}\right) \varkappa_1 + f_{1\cdot 2} \varkappa_2 + \cdots + f_{1\cdot n-3} \varkappa_{n-3} + l_1 = 0 \\ &f_{2\cdot 1} \varkappa_1 + \left(f_{2\cdot 2} + \frac{d_2^2}{p_5}\right) \varkappa_2 + \cdots + f_{2\cdot n-3} \varkappa_{n-3} + l_2 = 0 \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ &f_{n-3\cdot 1} \varkappa_1 + f_{n-3\cdot 2} \varkappa_2 + \cdots + \left(f_{n-3\cdot n-3} + \frac{d_{n-3}^2}{p_n}\right) \varkappa_{n-3} + l_{n-3} = 0. \end{aligned}$$

Wenn hieraus die $\varkappa$ und dann weiter nach (1) die ϱ berechnet sind, findet sich die Orientirungsgröße aus irgend einer der Gleichungen (2), § 3.

II. Benutzt man dagegen die Bedingungsgleichungen in der ursprünglichen Form

$$\alpha_\nu \varrho_1 + \beta_\nu \varrho_2 + \gamma_\nu \varrho_{\nu+2} + \sigma_\nu u + K_\nu = 0, \qquad (\nu = 1 \dots n-2)$$

und ist k_ν die Korrelate der νten Gleichung, so lauten die Korrelatengleichungen:

$$1) \quad \begin{array}{l} p_1 \varrho_1 = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_{n-2} k_{n-2} \\ p_2 \varrho_2 = \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \cdots + \beta_{n-2} k_{n-2} \\ p_3 \varrho_3 = \gamma_1 k_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_4 \varrho_4 = \quad \cdot \quad \gamma_2 k_2 \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p_n \varrho_n = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \gamma_{n-2} k_{n-2} \end{array}$$

und

$$2) \quad \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \cdots + \sigma_{n-2} k_{n-2} = 0.$$

Addirt man die Gleichungen (1), so ist wieder wegen (2):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \varrho_i = 0.$$

Setzt man

$$3) \quad g_{\lambda\mu} = \frac{\alpha_\lambda \alpha_\mu}{p_1} + \frac{\beta_\lambda \beta_\mu}{p_2} = g_{\mu\lambda},$$

so werden hier die folgenden Normalgleichungen erhalten:

$$4) \quad \begin{array}{l} \left(g_{1.1} + \frac{\gamma_1^2}{p_3}\right) k_1 + g_{1.2} k_2 + \cdots + g_{1.n-2} k_{n-2} + \sigma_1 u + K_1 = 0 \\ g_{2.1} k_1 + \left(g_{2.2} + \frac{\gamma_2^2}{p_4}\right) k_2 + \cdots + g_{2.n-2} k_{n-2} + \sigma_2 u + K_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ g_{n-2.1} k_1 + g_{n-2.2} k_2 + \cdots + \left(g_{n-2.n-2} + \frac{\gamma_{n-2}^2}{p_n}\right) k_{n-2} + \sigma_{n-2} u + K_{n-2} = 0 \\ \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 + \cdots + \sigma_{n-2} k_{n-2} \quad \cdot \quad \cdot = 0. \end{array}$$

Bei diesem Verfahren hat man $(n-1)$ Gleichungen für $k_1 \dots k_{n-2}$ und u, während bei dem Verfahren unter I nur $(n-3)$ Gleichungen zur Bestimmung der Korrelaten $\varkappa$ aufzulösen sind, wozu noch eine Gleichung für u kommt. Dafür sind aber hier die Koefficienten der Normalgleichungen (4) einfacher zu bilden, als die der Normalgleichungen unter I.

Zwischen den k und den aus I zu bestimmenden $\varkappa$ bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sigma_2 x_1 + \sigma_3 x_2 + \cdots + \sigma_{n-2} x_{n-3} \\
k_2 &= -\sigma_1 x_1 \\
k_3 &= -\sigma_1 x_2 \\
&\vdots \\
k_{n-2} &= -\sigma_1 x_{n-3}.
\end{aligned}$$

§ 5.

Da in den Bedingungsgleichungen außer den Verbesserungen ϱ_1 und ϱ_2 und der Unbekannten u immer nur eine Richtungsverbesserung ϱ_i auftritt, so ist es leicht, die Ausgleichung auf eine solche nach vermittelnden Beobachtungen zu reduciren.

Setzt man

1) $$\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \alpha'_\nu \quad \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = \beta'_\nu \quad \frac{\sigma_\nu}{\gamma_\nu} = \sigma'_\nu \quad \frac{K_\nu}{\gamma_\nu} = K'_\nu,$$

so ist

$$\varrho_{\nu+2} = -\alpha'_\nu \varrho_1 - \beta'_\nu \varrho_2 - \sigma'_\nu u - K'_\nu, \qquad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

und man hat mithin die folgenden Fehlergleichungen:

2)
$$\begin{array}{rcllll}
 & & & & & \text{Gewicht} \\
\varrho_1 &=& \varrho_1 & \cdot & \cdot & p_1 \\
\varrho_2 &=& \cdot & \varrho_2 & \cdot & p_2 \\
K'_1 + \varrho_3 &=& -\alpha'_1 \varrho_1 & -\beta'_1 \varrho_2 & -\sigma'_1 u & p_3 \\
K'_2 + \varrho_4 &=& -\alpha'_2 \varrho_1 & -\beta'_2 \varrho_2 & -\sigma'_2 u & p_4 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
K'_{n-2} + \varrho_n &=& -\alpha'_{n-2} \varrho_1 & -\beta'_{n-2} \varrho_2 & -\sigma'_{n-2} u & p_n.
\end{array}$$

Um die Normalgleichungen zu erhalten, ist zu bilden

3)
$$\begin{aligned}
p_1 \varrho_1 - \sum_{\nu=1}^{n-2} p_{\nu+2} \varrho_{\nu+2} \alpha'_\nu &= 0 \\
p_2 \varrho_2 - \sum_{\nu=1}^{n-2} p_{\nu+2} \varrho_{\nu+2} \beta'_\nu &= 0 \\
- \sum_{\nu=1}^{n-2} p_{\nu+2} \varrho_{\nu+2} \sigma'_\nu &= 0.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man zunächst

$$p_1 \varrho_1 + p_2 \varrho_2 + \sum_{\nu=1}^{n-2} p_{\nu+2} \varrho_{\nu+2} (\sigma'_\nu - \alpha'_\nu - \beta'_\nu) = 0$$

oder, da $\sigma'_\nu - \alpha'_\nu - \beta'_\nu = 1$ ist,

4) $$\sum_{i=1}^{n} p_i \varrho_i = 0.$$

Andrerseits folgen aus (3) die Normalgleichungen:

$$
5)\qquad
\begin{aligned}
h_{1.1}\varrho_1 + h_{1.2}\varrho_2 + h_{1.3}u &= -L_1\\
h_{1.2}\varrho_1 + h_{2.2}\varrho_2 + h_{2.3}u &= -L_2\\
h_{1.3}\varrho_1 + h_{2.3}\varrho_2 + h_{3.3}u &= -L_3,
\end{aligned}
$$

wenn gesetzt wird:

$$
6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&p_1 \cdot + p_3\alpha_1'^2 + p_4\alpha_2'^2 + \cdots + p_n\alpha_{n-2}'^2 = h_{1.1}\\
&\cdot\ p_2 + p_3\beta_1'^2 + p_4\beta_2'^2 + \cdots + p_n\beta_{n-2}'^2 = h_{2.2}\\
&p_3\sigma_1'^2 + p_4\sigma_2'^2 + \cdots + p_n\sigma_{n-2}'^2 = h_{3.3}\\
&p_3\alpha_1'\beta_1' + p_4\alpha_2'\beta_2' + \cdots + p_n\alpha_{n-2}'\beta_{n-2}' = h_{1.2}\\
&p_3\alpha_1'\sigma_1' + p_4\alpha_2'\sigma_2' + \cdots + p_n\alpha_{n-2}'\sigma_{n-2}' = h_{1.3}\\
&p_3\beta_1'\sigma_1' + p_4\beta_2'\sigma_2' + \cdots + p_n\beta_{n-2}'\sigma_{n-2}' = h_{2.3}\\
&\text{und}\\
&p_3\alpha_1' K_1' + p_4\alpha_2' K_2' + \cdots + p_n\alpha_{n-2}' K_{n-2}' = L_1\\
&p_3\beta_1' K_1' + p_4\beta_2' K_2' + \cdots + p_n\beta_{n-2}' K_{n-2}' = L_2\\
&p_3\sigma_1' K_1' + p_4\sigma_2' K_2' + \cdots + p_n\sigma_{n-2}' K_{n-2}' = L_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Zwischen den h besteht die nachstehende Kontrollgleichung:

$$
7)\qquad h_{1.1} + h_{2.2} + h_{3.3} + 2h_{1.2} - 2h_{1.3} - 2h_{2.3} = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n.
$$

Sind die Gewichte sämmtlich gleich 1, so ist also dieser Ausdruck gleich der Anzahl der Fixpunkte, $= n$.

Ferner ist

$$
8)\qquad -L_1 - L_2 + L_3 = p_3 K_1' + p_4 K_2' + \cdots + p_n K_{n-2}'.
$$

Ist die Anzahl der Fixpunkte größer als 5, so würde ich dieser Auflösung vor den beiden andern des § 4 den Vorzug geben. Bei $n = 5$ ist es ziemlich einerlei, nach welchem der angegebenen Verfahren man rechnet. Für $n = 4$ dürfte das erste Verfahren I, § 4, am vorteilhaftesten sein.

Vermittelnde Beobachtungen kann man auch mit Hülfe der Gl. (7), § 3, herstellen.

§ 6.

Die Gleichungen

$$
\varrho_{\nu+2} = -\frac{1}{\gamma_\nu}(\alpha_\nu\varrho_1 + \beta_\nu\varrho_2 + \sigma_\nu u + K_\nu)
$$

lassen sich auch aus den in der geodätischen Praxis gewöhnlich benutzten Fehlergleichungen, welche die Koordinaten x, y des zu bestimmenden Punktes und eine Orientirungsgröße als Unbekannte enthalten, ableiten.

Durch logarithmische Differentiation der Gleichung

$$\operatorname{tang}(t_\lambda+\tau_\lambda) = \frac{y_\lambda - y'}{x_\lambda - x'}$$

findet man

$$d(t_\lambda+\tau_\lambda) = \frac{\sin(t_\lambda+\tau_\lambda)}{r_\lambda}\,dx' - \frac{\cos(t_\lambda+\tau_\lambda)}{r_\lambda}\,dy',$$

und daraus, wenn

$$dx' = x-x' \qquad\qquad t_\lambda+\tau_\lambda+d(t_\lambda+\tau_\lambda) = t_\lambda+\varrho_\lambda+u$$
$$dy' = y-y'$$

gesetzt wird, die Fehlergleichungen:

$$1)\qquad \varrho_\lambda = \tau_\lambda - u + \frac{\varrho''}{r_\lambda}\sin t_\lambda\cdot(x-x') - \frac{\varrho''}{r_\lambda}\cos t_\lambda\cdot(y-y').$$

$$(\lambda = 1\ldots n) \qquad \varrho'' = 206\,264{,}8$$

Dies sind die in der Regel zur Verwendung kommenden Fehlergleichungen.

Aus den Gleichungen

$$\varrho_k+u-\tau_k = \frac{\varrho''}{r_k}\sin t_k\cdot(x-x') - \frac{\varrho''}{r_k}\cos t_k\cdot(y-y')$$
$$\varrho_i+u-\tau_i = \frac{\varrho''}{r_i}\sin t_i\cdot(x-x') - \frac{\varrho''}{r_i}\cos t_i\cdot(y-y')$$

ergiebt sich nun

$$2)\quad \begin{aligned} r_k\cos t_i\cdot(\varrho_k+u-\tau_k) - r_i\cos t_k\cdot(\varrho_i+u-\tau_i) &= \varrho''\sin(t_k-t_i)\cdot(x-x') \\ r_k\sin t_i\cdot(\varrho_k+u-\tau_k) - r_i\sin t_k\cdot(\varrho_i+u-\tau_i) &= \varrho''\sin(t_k-t_i)\cdot(y-y'). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) können dazu dienen, von dem Punkte Q' (x', y') zu dem Punkte Q (x, y) überzugehen, wenn die ϱ und u durch die Ausgleichung bereits bekannt geworden sind; man wird sie auch bei der Gewichtsbestimmung der Koordinaten x, y benutzen können, wenn eines der vorher angegebenen Verfahren angewandt wird.

Ersetzt man in den Fehlergleichungen (1) $x-x'$ und $y-y'$ durch die Ausdrücke

$$2^*)\quad \begin{aligned} x-x' &= \frac{1}{\varrho''\sin(t_2-t_1)}\Big\{r_2\cos t_1\cdot(\varrho_2+u-\tau_2) - r_1\cos t_2\cdot(\varrho_1+u-\tau_1)\Big\} \\ y-y' &= \frac{1}{\varrho''\sin(t_2-t_1)}\Big\{r_2\sin t_1\cdot(\varrho_2+u-\tau_2) - r_1\sin t_2\cdot(\varrho_1+u-\tau_1)\Big\}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\varrho_\lambda = \tau_\lambda - u - \frac{1}{r_\lambda \sin(t_2 - t_1)} \left\{ r_2 \sin(t_1 - t_\lambda) \cdot (\varrho_2 + u - \tau_2) + r_1 \sin(t_\lambda - t_2) \cdot (\varrho_1 + u - \tau_1) \right\}$$

$$(\lambda = 3 \ldots n)$$

oder mit den Bezeichnungen (7) des § 1:

$$\varrho_{\nu+2} = \tau_{\nu+2} + \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} \tau_2 + \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} \tau_1 - u\left(1 + \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} + \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\right) - \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} \varrho_2 - \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} \varrho_1$$

oder nach (1), § 2, und (1), § 3:

3) $$\varrho_{\nu+2} = -\frac{1}{\gamma_\nu}(\alpha_\nu \varrho_1 + \beta_\nu \varrho_2 + \sigma_\nu u + K_\nu). \qquad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

§ 7.

Auch die Gleichungen (7), § 3:

$$a_\lambda \varrho_1 + b_\lambda \varrho_2 + c_\lambda \varrho_3 + d_\lambda \varrho_{\lambda+3} + l_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1 \ldots n-3)$$

können mit Hülfe der üblichen Fehlergleichungen (1), § 6, abgeleitet werden. Gleichzeitig kann man noch eine andere Form für sie erhalten.

Wenn die 4 Fehlergleichungen

$$\varrho_1 - \tau_1 + u - \frac{1}{r_1} \sin t_1 \cdot (x - x') + \frac{1}{r_1} \cos t_1 \cdot (y - y') = 0$$

$$\varrho_2 - \tau_2 + u - \frac{1}{r_2} \sin t_2 \cdot (x - x') + \frac{1}{r_2} \cos t_2 \cdot (y - y') = 0$$

$$\varrho_3 - \tau_3 + u - \frac{1}{r_3} \sin t_3 \cdot (x - x') + \frac{1}{r_3} \cos t_3 \cdot (y - y') = 0$$

$$\varrho_\mu - \tau_\mu + u - \frac{1}{r_\mu} \sin t_\mu \cdot (x - x') + \frac{1}{r_\mu} \cos t_\mu \cdot (y - y') = 0,$$

wo μ die Werthe $4 \ldots n$ annehmen kann, gleichzeitig bestehen sollen, so muß

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 - \tau_1 & 1 & \frac{1}{r_1} \sin t_1 & \frac{1}{r_1} \cos t_1 \\ \varrho_2 - \tau_2 & 1 & \frac{1}{r_2} \sin t_2 & \frac{1}{r_2} \cos t_2 \\ \varrho_3 - \tau_3 & 1 & \frac{1}{r_3} \sin t_3 & \frac{1}{r_3} \cos t_3 \\ \varrho_\mu - \tau_\mu & 1 & \frac{1}{r_\mu} \sin t_\mu & \frac{1}{r_\mu} \cos t_\mu \end{vmatrix} = 0$$

sein. Entwickelt man diese Determinante und multiplicirt noch mit $r_1 r_2 r_3 r_\mu$, so ergiebt sich

$$1)\quad \begin{aligned} & r_1(\varrho_1-\tau_1)\left\{ +r_2\sin(t_\mu-t_3)+r_3\sin(t_2-t_\mu)+r_\mu\sin(t_3-t_2)\right\} \\ & +r_2(\varrho_2-\tau_2)\left\{r_1\sin(t_3-t_\mu)+ +r_3\sin(t_\mu-t_1)+r_\mu\sin(t_1-t_3)\right\} \\ & +r_3(\varrho_3-\tau_3)\left\{r_1\sin(t_\mu-t_2)+r_2\sin(t_1-t_\mu)+ +r_\mu\sin(t_2-t_1)\right\} \\ & +r_\mu(\varrho_\mu-\tau_\mu)\left\{r \sin(t_2-t_3)+r_2\sin(t_3-t_1)+r_3\sin(t_1-t_2) \right\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Die Summe der Koefficienten ist, wie es sein muß, Null.

Wenn man die Gleichung (1) mit $\sin(t_2-t_1)$ multiplicirt, so erhält man, indem man wieder die Bezeichnungen (7), § 1, benutzt:

$$\begin{aligned} & (\varrho_1-\tau_1)\left\{\alpha_1\beta_{\mu-2}-\alpha_{\mu-2}\beta_1+\alpha_1\gamma_{\mu-2}-\alpha_{\mu-2}\gamma_1\right\} \\ & +(\varrho_2-\tau_2)\left\{\beta_1\alpha_{\mu-2}-\beta_{\mu-2}\alpha_1+\beta_1\gamma_{\mu-2}-\beta_{\mu-2}\gamma_1\right\} \\ & +(\varrho_3-\tau_3)\ \gamma_1(\alpha_{\mu-2}+\beta_{\mu-2}+\gamma_{\mu-2})-(\varrho_\mu-\tau_\mu)\gamma_{\mu-2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = 0, \end{aligned}$$

und hieraus mit den Bezeichnungen (1) des § 2, ferner (1), (4) und (6) des § 3:

$$2)\quad \begin{cases} a_{\mu-3}(\varrho_1-\tau_1)+b_{\mu-3}(\varrho_2-\tau_2)+c_{\mu-3}(\varrho_3-\tau_3)+d_{\mu-3}(\varrho_\mu-\tau_\mu) = 0 \\ \text{oder} \\ a_{\mu-3}\varrho_1+b_{\mu-3}\varrho_2+c_{\mu-3}\varrho_3+d_{\mu-3}\varrho_\mu+l_{\mu-3} = 0. \\ (\mu = 4\ldots n) \end{cases}$$

Die Gleichung (1) läßt sich aber noch auf eine andere Form bringen.

Der Winkel $Q' P_2 P_1$ werde mit φ_2, der Winkel $Q' P_3 P_1$ mit φ_3, der Winkel $Q' P_\mu P_1$ mit φ_μ, ferner der Winkel $P_2 P_1 P_3$ mit $\psi_{2\cdot 3}$, der Winkel $P_2 P_1 P_\mu$ mit $\psi_{2.\mu}$ und der Winkel $P_3 P_1 P_\mu$ mit $\psi_{3\cdot\mu}$ bezeichnet. Wie früher sei $P_1 P_2 = s_2$, $P_1 P_3 = s_3$, $P_1 P_\mu = s_\mu$ und $Q' P_1 = r_1$, $Q' P_2 = r_2$, $Q' P_3 = r_3$, $Q' P_\mu = r_\mu$.

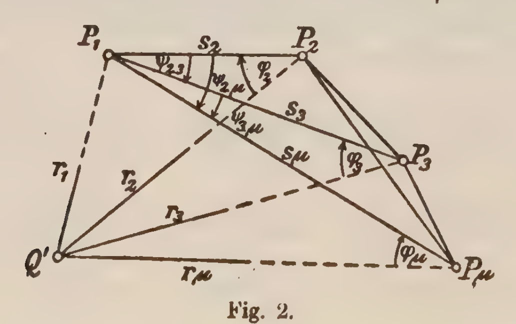


Fig. 2.

Dann ist z. B.

$$r_1 \sin(t_2 - t_3) + r_2 \sin(t_3 - t_1) + r_3 \sin(t_1 - t_2) =$$
$$-\sin(t_2 - t_1)[r_3 - r_1 \cos(t_3 - t_1)] + \sin(t_3 - t_1)[r_2 - r_1 \cos(t_2 - t_1)],$$

oder da man hier die kleinen Größen erster Ordnung vernachlässigen, also den Winkel $P_1 Q' P_2 = t_2 - t_1$ u. s. w. setzen darf,

$$= -s_3 \sin(t_2 - t_1)\cos\varphi_3 + s_2 \sin(t_3 - t_1)\cos\varphi_2$$
$$= \frac{s_2 s_3}{r_1}\{-\sin\varphi_2 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_3 \cos\varphi_2\} = \frac{s_2 s_3}{r_1}\sin(\varphi_3 - \varphi_2)$$
$$= \frac{s_2 s_3}{r_1}\sin(t_3 - t_2 + \psi_{2.3}).$$

Ebenso findet man

$$r_1 \sin(t_\mu - t_2) + r_2 \sin(t_1 - t_\mu) + r_\mu \sin(t_2 - t_1) = \frac{s_2 s_\mu}{r_1}\sin(t_\mu - t_2 - \psi_{2.\mu})$$

$$r_1 \sin(t_3 - t_\mu) + r_3 \sin(t_\mu - t_1) + r^\mu \sin(t_1 - t_3) = \frac{s_3 s_\mu}{r_1}\sin(t_3 - t_\mu + \psi_{3.\mu}).$$

Dagegen wird, wenn man den Winkel $P_3 P_2 P_\mu$ durch $\psi'_{3.\mu}$ bezeichnet und $P_2 P_3 = s'_3$ und $P_2 P_u = s'_\mu$ setzt:

$$r_2 \sin(t_u - t_3) + r_3 \sin(t_2 - t_\mu) + r_\mu \sin(t_3 - t_2) = \frac{s'_3 s'_\mu}{r_2}\sin(t_\mu - t_3 - \psi'_{3.\mu}).$$

Multiplicirt man die Gleichung (1) mit $\frac{r_1}{s_2 s_3 s_\mu}$, so folgt mithin aus ihr:

3) $$a'_{\mu-3}(\varrho_1 - \tau_1) + b'_{\mu-3}(\varrho_2 - \tau_2) + c'_{\mu-3}(\varrho_3 - \tau_3) + d'_{\mu-3}(\varrho_\mu - \tau_\mu) = 0,$$

wo

4) $$\begin{cases} b'_{\mu-3} = \frac{r_2}{s_2}\sin(t_3 - t_\mu + \psi_{3.\mu}) \\ c'_{\mu-3} = \frac{r_3}{s_3}\sin(t_\mu - t_2 - \psi_{2.}\ ) \qquad (\mu = 4 \ldots n) \\ d'_{\mu-3} = \frac{r_u}{s_\mu}\sin(t_2 - t_3 + \psi_{2.3}) \\ a'_{\mu-3} = -b'_{\mu-3} - c'_{\mu-3} - d'_{\mu-3} = \frac{r_1^2 s'_3 s'_u}{r_2 s_2 s_3 s_\mu}\sin(t_\mu - t_3 - \psi'_{3.\mu}) \end{cases}$$

ist.

Der Zusammenhang zwischen a_λ, b_λ, c_λ, d_λ und a'_λ, b'_λ, c'_λ, d'_λ ist

$$\frac{a'_\lambda}{a_\lambda} = \frac{b'_\lambda}{b_\lambda} = \frac{c'_\lambda}{c_\lambda} = \frac{d'_\lambda}{d_\lambda} = \frac{r_1}{s_2 s_3 s_{\lambda+3}\sin(t_2 - t_1)}.$$

Es ist leicht, diejenige Bedingungsgleichung herzuleiten, durch deren Entwicklung die Differentialgleichung (3) entsteht.

Die Richtungswerthe auf Q' nach $P_1 \ldots P_\mu$ seien $\mathfrak{T}_1 \ldots \mathfrak{T}_\mu$; dann ist identisch:

$$
\begin{aligned}
&\sin(\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_1)\{r_1 \sin(\mathfrak{T}_3-\mathfrak{T}_\mu)+r_3\sin(\mathfrak{T}_u-\mathfrak{T}_1)+r_\mu\sin(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_3)\}\\
5)\qquad &+\sin(\mathfrak{T}_3-\mathfrak{T}_1)\{r_1\sin(\mathfrak{T}_\mu-\mathfrak{T}_2)+r_2\sin(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_\mu)+r_\mu\sin(\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_1)\}\\
&+\sin(\mathfrak{T}_\mu-\mathfrak{T}_1)\{r_1\sin(\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_3)+r_2\sin(\mathfrak{T}_3-\mathfrak{T}_1)+r_3\sin(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)\}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Formt man die Ausdrücke in den Klammern in derselben Weise wie vorher um, und dividirt man alsdann durch $\frac{s_2 s_3 s_u}{r_1}$, so geht die Gleichung (5) über in die folgende:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s_2}\sin(\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_1)\sin(\mathfrak{T}_3-\mathfrak{T}_\mu+\psi_{3\cdot\mu})+\frac{1}{s_3}\sin(\mathfrak{T}_3-\mathfrak{T}_1)\sin(\mathfrak{T}_\mu-\mathfrak{T}_2-\psi_{2\cdot\mu})\\
6)\qquad &+\frac{1}{s_\mu}\sin(\mathfrak{T}_\mu-\mathfrak{T}_1)\sin(\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_3+\psi_{2\cdot3}) = 0.
\end{aligned}
$$

Wenn also ein Punkt dadurch bestimmt ist, daß von ihm die Richtungen nach den Punkten P_1, P_2, P_3, P_μ, deren Lage gegeben ist, beobachtet sind, so muß die vorstehende Gleichung erfüllt sein.

Setzt man in die Gleichung (6)

$$\mathfrak{T}_1 = t_1+\tau_1, \ldots, \mathfrak{T}_\mu = t_\mu+\tau_\mu$$

und entwickelt alsdann, so gelangt man, wenn man berücksichtigt, daß nach Fig. 2

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_\mu-\mathfrak{T}_2-\psi_{2.\mu} &= \varphi_2-\varphi_\mu &\qquad \frac{\sin(\mathfrak{T}_u-\mathfrak{T}_1)}{s_u} &= \frac{\sin\varphi_\mu}{r_1}\\
\mathfrak{T}_2-\mathfrak{T}_3+\psi_{2.3} &= \varphi_3-\varphi_2 & &\\
\mathfrak{T}_3-\mathfrak{T}_\mu+\psi_{3.\mu} &= \varphi_\mu-\varphi_3 &\qquad \cos(\mathfrak{T}_u-\mathfrak{T}_1) &= \frac{r_\mu-s_u\cos\varphi_\mu}{r_1}
\end{aligned}
$$

ist, zu der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s_2}\sin(t_2-t_1)\sin(t_3-t_\mu+\psi_{3.\mu})+\frac{1}{s_3}\sin(t_3-t_1)\sin(t_\mu-t_2-\psi_{2.\mu})\\
7)\qquad &+\frac{1}{s_\mu}\sin(t_\mu-t_1)\sin(t_2-t_3+\psi_{2.3})\\
&= \frac{1}{r_1}\{a'_{\mu-3}\tau_1+b'_{\mu-3}\tau_2+c'_{\mu-}\ \tau_3+d'_{\mu-3}\tau_\mu\}.
\end{aligned}
$$

Wenn man also in die Gl. (6) einmal $\mathfrak{T}_i = t_i+\varrho_i+u$, das andere Mal $\mathfrak{T}_i = t_i+\tau_i$ setzt und sodann beide Ergebnisse von einander subtrahirt, so wird man wieder die Gleichung (3) erhalten.

§ 8.

Es sei im Besondern die Anzahl der Fixpunkte gleich 4. Außerdem sei $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$.

Dann ist

1)
$$\begin{aligned} r_1 \sin(t_3 - t_2) &= \alpha_1 & r_1 \sin(t_4 - t_2) &= \alpha_2 \\ r_2 \sin(t_1 - t_3) &= \beta_1 & r_2 \sin(t_1 - t_4) &= \beta_2 \\ r_3 \sin(t_2 - t_1) &= \gamma_1 & r_4 \sin(t_2 - t_1) &= \gamma_2 \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= \sigma_1 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= \sigma_2. \end{aligned}$$

Wendet man zunächst die erste Auflösung, I § 4, an, so hat man weiter zu setzen:

2)
$$\begin{aligned} \alpha_1 \sigma_2 - \alpha_2 \sigma_1 &= a \\ \beta_1 \sigma_2 - \beta_2 \sigma_1 &= b \\ \gamma_1 \sigma_2 \quad \cdot \quad &= c \\ \cdot \quad - \gamma_2 \sigma_1 &= d, \end{aligned}$$

wo

$$a + b + c + d = 0$$

ist, ferner

3) $$K_1 \sigma_2 - K_2 \sigma_1 = -(a\tau_1 + b\tau_2 + c\tau_3 + d\tau_4) = l.$$

Setzt man noch

4) $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = F,$$

so lautet hier die Normalgleichung

5) $$Fx + l = 0, \; \varkappa = -\frac{l}{F}.$$

Zur Kontrolle kann man die Gleichungen (3) und (4) des § 7 ableiten.

Die Richtungsverbesserungen sind:

6) $$\varrho_1 = a\varkappa \qquad \varrho_2 = b\varkappa \qquad \varrho_3 = c\varkappa \qquad \varrho_4 = d\varkappa.$$

Für die Orientirungsgröße u ist:

7)
$$\begin{aligned} -\sigma_1 u &= K_1 + \alpha_1 \varrho_1 + \beta_1 \varrho_2 + \gamma_1 \varrho_3 = K_1 + \varkappa(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) \\ -\sigma_2 u &= K_2 + \alpha_2 \varrho_1 + \beta_2 \varrho_2 + \gamma_2 \varrho_4 = K_2 + \varkappa(a\alpha_2 + b\beta_2 + d\gamma_2). \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler m der Gewichtseinheit wird:

$$m = \sqrt{-l\varkappa} = \sqrt{F\varkappa^2} = \sqrt{\frac{l^2}{F}}.$$

Nach dem zweiten Verfahren, II § 4, erhält man, wenn gesetzt wird:

$$1)\quad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = G_1 \qquad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = G_2$$
$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 = g,$$

$$2)\quad \begin{cases} G_1 k_1 + g k_2 + \sigma_1 u = -K_1 \\ g k_1 + G_2 k_2 + \sigma_2 u = -K_2 \\ \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 \quad\cdot = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung der Normalgleichungen (2) ergiebt, mit den Bezeichnungen:

$$3)\quad \begin{cases} K_1\sigma_2 - K_2\sigma_1 = l \\ G_1\sigma_2 - g\sigma_1 = q_1 \\ g\sigma_2 - G_2\sigma_1 = q_2 \\ q_1 K_2 - q_2 K_1 = Q \\ G_1 G_2 - g^2 = H \\ G_1\sigma_2^2+G_2\sigma_1^2-2g\sigma_1\sigma_2 = a^2+b^2+c^2+d^2 = \frac{1}{g}(q_1 q_2 + H\sigma_1\sigma_2) \\ = q_1\sigma_2 - q_2\sigma_1 = F, \end{cases}$$

$$4)\quad k_1 = -\frac{l\sigma_2}{F} \qquad k_2 = +\frac{l\sigma_1}{F} \qquad -u = \frac{Q}{F}.$$

Die Verbesserungen der Richtungen sind alsdann:

$$5)\quad \varrho_1 = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2, \quad \varrho_2 = \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2, \quad \varrho_3 = \gamma_1 k_1, \quad \varrho_4 = \gamma_2 k_2.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist auch hier

$$m = \sqrt{\frac{l^2}{F}}.$$

Der Zusammenhang zwischen k_1, k_2 und $\varkappa$ ist

$$k_1 = \sigma_2\varkappa \qquad k_2 = -\sigma_1\varkappa.$$

Nach dem dritten Verfahren, § 5, ist zu setzen:

$$1)\quad \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \alpha_1' \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \beta_1' \quad \frac{\sigma_1}{\gamma_1} = \sigma_1' \quad \frac{K_1}{\gamma_1} = K_1' \\ \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \alpha_2' \quad \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \beta_2' \quad \frac{\sigma_2}{\gamma_2} = \sigma_2' \quad \frac{K_2}{\gamma_2} = K_2' \\ 1+\alpha_1'^2+\alpha_2'^2 = h_{1\cdot1} \quad \alpha_1'\beta_1'+\alpha_2'\beta_2' = h_{1\cdot2} \quad \alpha_1'K_1'+\alpha_2'K_2' = L_1 \\ 1+\beta_1'^2+\beta_2'^2 = h_{2\cdot2} \quad \alpha_1'\sigma_1'+\alpha_2'\sigma_2' = h_{1\cdot3} \quad \beta_1'K_1'+\beta_2'K_2' = L_2 \\ \sigma_1'^2+\sigma_2'^2 = h_{3\cdot3} \quad \beta_1'\sigma_1'+\beta_2'\sigma_2' = h_{2\cdot3} \quad \sigma_1'K_1'+\sigma_2'K_2' = L_3. \end{cases}$$

Dabei ist

$$h_{1\cdot1}+h_{2\cdot2}+h_{3\cdot3}+2h_{1\cdot2}-2h_{1\cdot3}-2h_{2\cdot3} = 4$$
$$-L_1-L_2+L_3 = K_1'+K_2'.$$

ϱ_1, ϱ_2, u findet man dann aus den Gleichungen

2)
$$\begin{aligned} h_{1\cdot1}\varrho_1+h_{1\cdot2}\varrho_2+h_{1\cdot3}u &= -L_1 \\ h_{1\cdot2}\varrho_1+h_{2\cdot2}\varrho_2+h_{2\cdot3}u &= -L_2 \\ h_{1\cdot3}\varrho_1+h_{2\cdot3}\varrho_2+h_{3\cdot3}u &= -L_3. \end{aligned}$$

Endlich ist

3)
$$\begin{aligned} -\varrho_3 &= K_1'+\alpha_1'\varrho_1+\beta_1'\varrho_2+\sigma_1'u \\ -\varrho_4 &= K_2'+\alpha_2'\varrho_1+\beta_2'\varrho_2+\sigma_2'u \end{aligned}$$

und

$$\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\varrho_4 = 0.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird

$$m = \sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2+\varrho_4^2} = \sqrt{K_1'^2+K_2'^2+L_1\varrho_1+L_2\varrho_2+L_3u}.$$

§ 9.

Um die angegebenen Auflösungsarten auch bei 5 Fixpunkten anzuwenden, ist das Beispiel gerechnet worden, das Herr Helmert in seiner Ausgleichungsrechnung, S. 158/163, gegeben hat. Die Rechnung ist a. a. O. nach vermittelnden Beobachtungen geführt, wobei also die rechtwinkligen Koordinaten von Q und eine Orientirungsgröße als Unbekannte auftreten.

Die Lage der Fixpunkte $P_1 \dots P_5$ ist durch ihre rechtwinkligen Koordinaten gegeben. Die positive x-Axe geht nach Süden, die positive y-Axe nach Westen. Die Azimute nehmen zu im Sinne der Drehung von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe.

Die Koordinaten der Fixpunkte und die beobachteten Richtungswerthe auf Q, $t_i - t_1$, die alle gleiches Gewicht haben, sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

P_i	x_i	y_i	$t_i - t_1$		
1	0	0	0°	0′	0″,00
2	− 1049ᵐ,953	+ 2846ᵐ,009	32	5	33,77
3	− 949,776	+ 4581,404	79	18	21,41
4	− 5178,015	+ 1934,509	263	20	2,91
5	− 3399,880	+ 3044,564	270	2	39,45.

(Bei Herrn Helmert ist der Punkt P_3 der Anfangspunkt der Koordinaten).

Zunächst ist die Lage eines Punktes Q' in der Nähe von Q zu bestimmen. Es möge dies mittelst der Beobachtungswerthe für die Richtungen nach P_1, P_2, P_3 geschehen; vergl. § 2. Dazu dient die folgende Rechnung, die hier ebenso wie die Weiterrechnung ausführlich mitgetheilt ist, um die aufzuwendende Arbeit erkennen zu lassen.

$$\begin{array}{rl}
y_2 \ldots & 3{,}454\,2363 \\
x_2 \ldots & 3{,}021\,1698n \\
\operatorname{tang} A_2 \ldots & 0{,}433\,0665n \\
\sin A_2 \ldots & 9{,}972\,2912 \\
\cos A_2 \ldots & \underline{9{,}539\,2247n} \\
s_2 \ldots & 3{,}481\,9451 \\
\sin(t_3-t_1) \ldots & \underline{9{,}992\,3910} \\
 & 3{,}474\,3361
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
y_3 \ldots & 3{,}660\,9986 \\
x_3 \ldots & 2{,}977\,6212n \\
\operatorname{tang} A_3 \ldots & 0{,}683\,3774n \\
\sin A_3 \ldots & 9{,}990\,8625 \\
\cos A_3 \ldots & \underline{9{,}307\,4850n} \\
s_3 \ldots & 3{,}670\,1361 \\
\sin(t_2-t_1) \ldots & \underline{9{,}725\,3324} \\
 & 3{,}395\,4685
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
A_2 = 110^0\ 15'\ 0'',30 \\
A_3 = 101\ \ 42\ 43{,}72
\end{array}$$

$$\operatorname{tang}\lambda \ldots 9{,}921\,1324$$

$$\begin{array}{rl}
\operatorname{tang}(45^0+\lambda) \ldots & 1{,}043\,1069 \\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}[t_3-t_2-(A_3-A_2)] \ldots & \underline{9{,}723\,3960} \\
 & 0{,}766\,5029
\end{array}
\qquad 45^0+\lambda = 84^0\ 49'\ 33'',32$$

$$\begin{array}{rl}
\tfrac{1}{2}[t_3+t_2-(A_3+A_2)] = & 260^0\ 17'\ 7'',04 \\
\tfrac{1}{2}(A_3+A_2) = & \underline{105\ \ 58\ \ 52{,}01} \\
\tfrac{1}{2}(t_3+t_2) = & 366\ \ 15\ \ 59{,}05 \\
\tfrac{1}{2}(t_3-t_2) = & 23\ \ 36\ \ 23{,}82
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
t_3 = & 29^0\ 52'\ 22'',87 \\
t_2 = & 342\ \ 39\ \ 35{,}23 \\
t_1 = & 310\ \ 34\ \ \ 1{,}46.
\end{array}$$

Es seien x', y' die rechtwinkligen Koordinaten von Q'. Dann ist

$$\begin{array}{l}
x' = r_1 \cos(t_1-180^0) \\
y' = r_1 \sin(t_1-180^0)
\end{array}
\qquad r_1 = s_2\,\frac{\sin(A_2-t_2)}{\sin(t_2-t_1)} = s_3\,\frac{\sin(A_3-t_3)}{\sin(t_3-t_1)}.$$

Man kann x', y' auch aus zweien der Gleichungen

$$y' = x' \operatorname{tang} t_1, \quad y_2-y' = (x_2-x')\operatorname{tang} t_2, \quad y_3-y' = (x_3-x')\operatorname{tang} t_3$$

bestimmen. Nimmt man die ersten beiden Gleichungen, so ist:

$$\begin{array}{rl}
x_2 \ldots & 3{,}021\,1698n \\
\operatorname{tang} t_2 \ldots & \underline{9{,}494\,4822n} \\
 & 2{,}515\,6520
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
y_2 = & +\overset{m}{2846{,}009} \\
-x_2 \operatorname{tang} t_2 = & -\ \underline{327{,}833} \\
 & 2518{,}176 \ldots 3{,}401\,0861 \\
 & \cos t_1 \ldots 9{,}813\,1390 \\
 & \cos t_2 \ldots 9{,}979\,7996 \\
 & 1:\sin(t_1-t_2) \ldots \underline{0{,}274\,6676n} \\
x' = & -\overset{m}{2942{,}336} \ldots\ldots 3{,}468\,6923n \\
 & \operatorname{tang} t_1 \ldots \underline{0{,}067\,4718n} \\
y' = & +3436{,}878 \ldots\ldots 3{,}536\,1641.
\end{array}$$

Die Azimute $t_i + \tau_i$ auf Q', sowie die Entfernungen r_i nach den Fixpunkten werden aus

$$\operatorname{tang}(t_i + \tau_i) = \frac{y_i - y'}{x_i - x'}, \quad r_i = \frac{x_i - x'}{\cos(t_i + \tau_i)} = \frac{y_i - y'}{\sin(t_i + \tau_i)}$$

erhalten.

i =	1	2	3	4	5
$y_i - y'$ ...	3,536 1641n	2,771 4912n	3,058 6257	3,176 7766n	2,593 6338n
$x_i - x'$ ...	3,468 6923	3,277 0090	3,299 4114	3,349 4094n	2,660 4329n
ɪg $(t_i + \tau_i)$ ...	0,067 4718n	9,494 4822n	9,759 2143	9,827 3672	9,933 2009
in $(t_i + \tau_i)$ ...	9,880 61n	9,474 28n	9,697 30	9,746 45n	9,813 53n
os $(t_i + \tau_i)$ ...	9,813 14	9,979 80	9,938 08	9,919 08n	9,880 32n
r_i ...	3,655 55	3,297 21	3,361 33	3,430 33	2,780 11.

Nachstehend sind die Werthe für $t_i + \tau_i$ und die näherungsweise orientirten Beobachtungen t_i angegeben.

i	$x_i - x'$	$y_i - y'$	$t_i + \tau_i$	t_i	τ_i
1	+ 2942,336 m	− 3436,878 m	310° 34′ 1″,46	1″,46	0
2	+ 1892,383	− 590,869	342 39 35,23	35,23	0
3	+ 1992,560	+ 1144,526	29 52 22,99	22,87	+ 0″,12
4	− 2235,679	− 1502,369	213 54 3,50	4,37	− 0,87
5	− 457,544	− 392,314	220 36 39,32	40,91	− 1,59

Wäre die Rechnung für t_2 und t_3 und für x', y' schärfer geführt worden, so würde sich auch $\tau_3 = 0$ ergeben haben.

Man kann nun zur Berechnung der α, β, γ schreiten. Dieselben sind, um kleinere Zahlen zu erhalten, durch 1000 dividirt; also es ist z. B.: $\alpha_1 = \frac{r_1}{1000} \sin(t_3 - t_2)$ gesetzt. Auf die Weiterentwicklung ist dies ohne Einfluß, da man ja die Bedingungsgleichungen durch beliebige Zahlen dividiren kann.

$10^{-3} . r_1$ ... 0,65555	$10^{-3} . r_2$ ... 0,29721	$10^{-3} . r_3$ ... 0,36133
$\sin(t_3 - t_2)$ ... 9,86563	$\sin(t_1 - t_3)$ ... 9,99239n	" r_4 ... 0,43033
$\sin(t_4 - t_2)$ ... 9,89198n	$\sin(t_1 - t_4)$ ... 9,99705	" r_5 ... 9,78011
$\sin(t_5 - t_2)$ ... 9,92819n	$\sin(t_1 - t_5)$ ... 0,00000	$\sin(t_2 - t_1)$ ... 9,72533

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 \dots 0{,}52118 & \beta_1 \dots 0{,}28960n & \gamma_1 \dots 0{,}08666 \\ \alpha_2 \dots 0{,}54753n & \beta_2 \dots 0{,}29426 & \gamma_2 \dots 0{,}15566 \\ \alpha_3 \dots 0{,}58374n & \beta_3 \dots 0{,}29721 & \gamma_3 \dots 9{,}50544 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = +3{,}3203 & \alpha_2 = -3{,}5280 & \alpha_3 = -3{,}8347 \\ \beta_1 = -1{,}9480 & \beta_2 = +1{,}9690 & \beta_3 = +1{,}9825 \\ \gamma_1 = \underline{+1{,}2208} & \gamma_2 = \underline{+1{,}4311} & \gamma_3 = \underline{+0{,}3202} \\ \sigma_1 = +2{,}5931 & \sigma_2 = -0{,}1279 & \sigma_3 = -1{,}5320 \\ \sigma_1 \;\dots\; 0{,}41382 & \sigma_2 \;\dots\; 9{,}10687n & \sigma_3 \;\dots\; 0{,}18526n. \end{array}$$

Für die Konstanten K_1, K_2, K_3 ergiebt sich, da hier $\tau_1 = \tau_2 = 0$ ist:

$$\begin{array}{lll} K_1 = -\gamma_1 \tau_3 & K_2 = -\gamma_2 \tau_4 & K_3 = -\gamma_3 \tau_5 \\ \quad = -0{,}146 & \quad = +1{,}245 & \quad = +0{,}509 \\ K_1 \dots 9{,}16435n & K_2 \dots 0{,}09517 & K_3 \dots 9{,}70672. \end{array}$$

Soll nun das erste Auflösungsverfahren, I § 4, angewendet werden, so ist weiter zu bilden:

$$\begin{array}{llll|l} \alpha_1\sigma_2 = -0{,}4247 & \beta_1\sigma_2 = +0{,}2492 & c_1 = +\gamma_1\sigma_2 = -0{,}1561 & & K_1\sigma_2 = +0{,}0187 \\ -\alpha_2\sigma_1 = \underline{+9{,}1485} & -\beta_2\sigma_1 = \underline{-5{,}1060} & d_1 = -\gamma_2\sigma_1 = -3{,}7109 & & -K_2\sigma_1 = \underline{-3{,}2284} \\ a_1 = +8{,}7238 & b_1 = -4{,}8568 & & & l_1 = -3{,}2097 \\ a_1 \dots 0{,}94071 & b_1 \dots 0{,}68635n & c_1 \dots 9{,}19340n & & \\ & & d_1 \dots 0{,}56948n & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll|l} \alpha_1\sigma_3 = -5{,}0868 & \beta_1\sigma_3 = +2{,}9844 & c_2 = +\gamma_1\sigma_3 = -1{,}8703 & & K_1\sigma_3 = +0{,}2237 \\ -\alpha_3\sigma_1 = \underline{+9{,}9438} & -\beta_3\sigma_1 = \underline{-5{,}1408} & d_2 = -\gamma_3\sigma_1 = -0{,}8303 & & -K_3\sigma_1 = \underline{-1{,}3199} \\ a_2 = +4{,}8570 & b_2 = -2{,}1564 & & & l_2 = -1{,}0962 \\ a_2 \dots 0{,}68637 & b_2 \dots 0{,}33373n & c_2 \dots 0{,}27191n & & \\ & & d_2 \dots 9{,}91924n & & \end{array}$$

$$\text{Probe: } \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a_1^2 = 76{,}107 & a_2^2 = 23{,}591 & a_1 a_2 = 42{,}372 \\ b_1^2 = 23{,}588 & b_2^2 = 4{,}650 & b_1 b_2 = 10{,}473 \\ c_1^2 = 0{,}024 & c_2^2 = 3{,}498 & c_1 c_2 = 0{,}292 \\ d_1^2 = \underline{13{,}771} & d_2^2 = \underline{0{,}689} & \underline{\qquad\quad} \\ \quad 113{,}490 & \quad 32{,}428 & \quad 53{,}137. \end{array}$$

Die Normalgleichungen lauten mithin:

$$113{,}490\,x_1 + 53{,}137\,x_2 = +3{,}210$$
$$53{,}137\,x_1 + 32{,}428\,x_2 = +1{,}096,$$

deren Auflösung

$$\varkappa_1 \ldots 8{,}72858 \qquad \varkappa_2 \ldots 8{,}73170n$$

ist. Damit erhält man für die Richtungsverbesserungen:

$$\begin{array}{llll}
a_1\varkappa_1 = +0{,}4670 & b_1\varkappa_1 = -0{,}2600 & c_1\varkappa_1 = -0{,}0083 & \varrho_4 = d_1\varkappa_1 = -0{,}1986 \\
a_2\varkappa_2 = \underline{-0{,}2619} & b_2\varkappa_2 = \underline{+0{,}1163} & c_2\varkappa_2 = \underline{+0{,}1008} & \varrho_5 = d_2\varkappa_2 = +0{,}0448 \\
\varrho_1 = +0{,}2051 & \varrho_2 = -0{,}1437 & \varrho_3 = +0{,}0925 &
\end{array}$$

Probe: $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5 = +0{,}3424 - 0{,}3423.$

Für die Orientirungsgröße u ergiebt sich

$$u = -\frac{1}{\sigma_1}\{K_1 + \alpha_1\varrho_1 + \beta_1\varrho_2 + \gamma_1\varrho_3\} = -0{,}3578.$$

Das Resultat dieser Auflösung ist also:

$$\begin{cases}
u+\varrho_1 = -0'',153 & u+\varrho_2 = -0'',502 \\
u+\varrho_3 = -0'',265 & u+\varrho_4 = -0'',556 \\
\multicolumn{2}{c}{u+\varrho_5 = -0'',313.}
\end{cases}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird

$$\sqrt{\frac{(-l_1\varkappa_1 - l_2\varkappa_2)}{2}} = \sqrt{\frac{0{,}1127}{2}} = \pm 0'',237.$$

Benutzt man das zweite Verfahren, II § 4, so hat man

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1^2 = 11{,}025 & \alpha_2^2 = 12{,}447 & \alpha_3^2 = 14{,}706 \\
\beta_1^2 = 3{,}795 & \beta_2^2 = 3{,}877 & \beta_3^2 = 3{,}930 \\
\gamma_1^2 = \underline{1{,}490} & \gamma_2^2 = \underline{2{,}048} & \gamma_3^2 = \underline{0{,}103} \\
G_1 = 16{,}310 & G_2 = 18{,}372 & G_3 = 18{,}739
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1\alpha_2 = -11{,}714 & \alpha_1\alpha_3 = -12{,}733 & \alpha_2\alpha_3 = +13{,}529 \\
\beta_1\beta_2 = \underline{-3{,}836} & \beta_1\beta_3 = \underline{-3{,}862} & \beta_2\beta_3 = \underline{+3{,}904} \\
g_1 = -15{,}550 & g_2 = -16{,}595 & g_3 = +17{,}433.
\end{array}$$

Zur Kontrolle ist

$$G_1 + G_2 + G_3 + 2(g_1+g_2+g_3) = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 + (\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2.$$

Die Normalgleichungen sind hier:

$$\begin{array}{l}
+16{,}310\,k_1 - 15{,}550\,k_2 - 16{,}595\,k_3 + 2{,}5931\,u = +0{,}146 \\
-15{,}550\,k_1 + 18{,}372\,k_2 + 17{,}433\,k_3 - 0{,}1279\,u = -1{,}245 \\
-16{,}595\,k_1 + 17{,}433\,k_2 + 18{,}739\,k_3 - 1{,}5320\,u = -0{,}509 \\
+2{,}5931\,k_1 - 0{,}1279\,k_2 - 1{,}5320\,k_3 \qquad\quad\;\; \cdot \;\; = 0.
\end{array}$$

Die Auflösung ergiebt

$k_1 = +0{,}0757 \quad k_2 = -0{,}1389 \quad k_3 = +0{,}1398 \quad u = -0{,}3578$

$k_1 \ldots 8{,}87910 \quad k_2 \ldots 9{,}14270n \quad k_3 \ldots 9{,}14551.$

(Die Beziehungen: $k_1 = \sigma_2 \varkappa_1 + \sigma_3 \varkappa_2$, $k_2 = -\sigma_1 \varkappa_1$, $k_3 = -\sigma_1 \varkappa_2$ sind hinreichend genau erfüllt).

Für die Verbesserungen findet man jetzt:

$\alpha_1 k_1 = +0{,}2514 \qquad \beta_1 k_1 = -0{,}1475 \qquad \varrho_3 = \gamma_1 k_1 = +0{,}0924$

$\alpha_2 k_2 = +0{,}4900 \qquad \beta_2 k_2 = -0{,}2735 \qquad \varrho_4 = \gamma_2 k_2 = -0{,}1988$

$\alpha_3 k_3 = \underline{-0{,}5361} \qquad \beta_3 k_3 = \underline{+0{,}2772} \qquad \varrho_5 = \gamma_3 k_3 = +0{,}0448$

$\varrho_1 = +0{,}2053 \qquad \varrho_2 = -0{,}1438$

Mithin ist das Ergebnis der zweiten Auflösung:

$u + \varrho_1 = -0'',153 \qquad u + \varrho_2 = -0'',502 \qquad u + \varrho_3 = -0'',265$

$u + \varrho_4 = -0'',557 \qquad u + \varrho_5 = -0'',313.$

Als mittleren Fehler der Gewichtseinheit erhält man aus den Normalgleichungen

$$\sqrt{\frac{-K_1 k_1 - K_2 k_2 - K_3 k_3}{3-1}} = \sqrt{\frac{0{,}1128}{2}} = \pm 0'',237.$$

Beim dritten Verfahren, § 5, ist zu berechnen:

$\alpha_1' \ldots 0{,}43452 \quad \beta_1' \ldots 0{,}20294n \quad \sigma_1' \ldots 0{,}32716 \quad K_1' \ldots 9{,}07769n$

$\alpha_2' \ldots 0{,}39187n \quad \beta_2' \ldots 0{,}13860 \quad \sigma_2' \ldots 8{,}95121n \quad K_2' \ldots 9{,}93951$

$\alpha_3' \ldots 1{,}07830n \quad \beta_3' \ldots 0{,}79177 \quad \sigma_3' \ldots 0{,}67982n \quad K_3' \ldots 0{,}20128$

$1 = 1$	$1 = 1$	
$\alpha_1'^2 = 7{,}397$	$\beta_1'^2 = 2{,}546$	$\sigma_1'^2 = 4{,}512$
$\alpha_2'^2 = 6{,}078$	$\beta_2'^2 = 1{,}893$	$\sigma_2'^2 = 0{,}008$
$\alpha_3'^2 = \underline{143{,}417}$	$\beta_3'^2 = \underline{38{,}330}$	$\sigma_3'^2 = \underline{22{,}890}$
$h_{1\cdot1} = 157{,}892$	$h_{2\cdot2} = 43{,}769$	$h_{3\cdot3} = 27{,}410$
$\alpha_1'\beta_1' = -\ 4{,}340$	$\alpha_1'\sigma_1' = +\ 5{,}777$	$\beta_1'\sigma_1' = -\ 3{,}389$
$\alpha_2'\beta_2' = -\ 3{,}392$	$\alpha_2'\sigma_2' = +\ 0{,}220$	$\beta_2'\sigma_2' = -\ 0{,}123$
$\alpha_3'\beta_3' = \underline{-74{,}143}$	$\alpha_3'\sigma_3' = \underline{+57{,}296}$	$\beta_3'\sigma_3' = \underline{-29{,}620}$
$h_{1\cdot2} = -81{,}875$	$h_{1\cdot3} = +63{,}293$	$h_{2\cdot3} = -33{,}132$
$\alpha_1'K_1' = -\ 0{,}325$	$\beta_1'K_1' = +\ 0{,}191$	$\sigma_1'K_1' = -0{,}254$
$\alpha_2'K_2' = -\ 2{,}145$	$\beta_2'K_2' = +\ 1{,}197$	$\sigma_2'K_2' = -0{,}078$
$\alpha_3'K_3' = \underline{-19{,}036}$	$\beta_3'K_3' = \underline{+\ 9{,}841}$	$\sigma_3'K_3' = \underline{-7{,}605}$
$L_1 = -21{,}506$	$L_2 = +11{,}229$	$L_3 = -7{,}937$

Kontrolle:

$$h_{1.1}+h_{2.2}+h_{3.3}+2h_{1.2}-2h_{1.3}-2h_{2.3} = 4{,}999 \text{ (anstatt 5)}$$
$$-L_1-L_2+L_3 = K'_1+K'_2+K'_3$$
$$+2{,}340 = -0{,}1196+0{,}8700+1{,}5896 = +2{,}340.$$

Also lauten die Normalgleichungen:

$$157{,}892\,\varrho_1-81{,}875\,\varrho_2+63{,}293\,u = +21{,}506$$
$$-81{,}875\,\varrho_1+43{,}769\,\varrho_2-33{,}132\,u = -11{,}229$$
$$+63{,}293\,\varrho_1-33{,}132\,\varrho_2+27{,}410\,u = +\ 7{,}937,$$

woraus folgt:

$$\varrho_1 = +0{,}2051 \qquad \varrho_2 = -0{,}1436 \qquad u = -0{,}3575$$
$$\varrho_1 \ldots 9{,}31197 \qquad \varrho_2 \ldots 9{,}15715n \qquad u \ldots 9{,}55328n.$$

Damit erhält man weiter

$$\varrho_3 = -K'_1-\alpha'_1\varrho_1-\beta'_1\varrho_2-\sigma'_1u = +0{,}0921$$
$$\varrho_4 = -K'_2-\alpha'_2\varrho_1-\beta'_2\varrho_2-\sigma'_2u = -0{,}1988$$
$$\varrho_5 = -K'_3-\alpha'_3\varrho_1-\beta'_3\varrho_2-\sigma'_3u = +0{,}0452.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist hiernach

$$\sqrt{\frac{\Sigma\varrho^2}{5-3}} = \sqrt{\frac{1}{2}\{K_1'^2+K_2'^2+K_3'^2+L_1\varrho_1+L_2\varrho_2+L_3u\}} = \pm 0'',237.$$

Dieses Verfahren liefert also als Resultat:

$$u+\varrho_1 = -0'',152 \qquad u+\varrho_2 = -0'',501 \qquad u+\varrho_3 = -0'',265$$
$$u+\varrho_4 = -0'',556 \qquad u+\varrho_5 = -0'',312.$$

Das Ergebnis der Ausgleichung nach allen 3 Auflösungen ist mithin:

$$\mathfrak{T}_1 = t_1+\varrho_1+u = 310^\circ\ 34'\ 1'',31$$
$$\mathfrak{T}_2 = t_2+\varrho_2+u = 342\ \ 39\ \ 34,73$$
$$\mathfrak{T}_3 = t_3+\varrho_3+u = 29\ \ 52\ \ 22,61$$
$$\mathfrak{T}_4 = t_4+\varrho_4+u = 213\ \ 54\ \ 3,81$$
$$\mathfrak{T}_5 = t_5+\varrho_5+u = 220\ \ 36\ \ 40,60.$$

Die rechtwinkligen Koordinaten x, y von Q kann man jetzt aus den Gleichungen

$$r_i = s_i\frac{\sin(A_i-\mathfrak{T}_i)}{\sin(\mathfrak{T}_i-\mathfrak{T}_1)}, \quad x = r_1\cos(\mathfrak{T}_1-180^0), \quad y = r_1\sin(\mathfrak{T}_1-180^0)$$

erhalten.

$s_2 \ldots$	3,481 9451		
$\sin(A_2 - \mathfrak{T}_2) \ldots$	9,898 9398		
$1 : \sin(\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1) \ldots$	0,274 6688		
	3,655 5537		
$\cos(\mathfrak{T}_1 - 180^0) \ldots$	9,813 1386n	$x \ldots$	3,468 6923n
$\sin(\mathfrak{T}_1 - 180^0) \ldots$	9,880 6110	$y \ldots$	3,536 1647

$$x = -2942\overset{m}{,}336 \qquad y = +3436\overset{m}{,}883.$$

Die erhaltenen Werthe sind in Uebereinstimmung mit den Angaben von Prof. Helmert (a. a. O. S. 162).

Man kann auch vom Punkte Q' zum Punkte Q übergehen, indem man für $x - x'$ und $y - y'$ Differentialausdrücke anwendet.

Aus den Gleichungen (2*), § 6, findet man z. B., da hier $\tau_1 = \tau_2 = 0$ ist:

$1 : \varrho'' \sin(t_2 - t_1) \ldots$	4,9602		4,9602		$-0{,}0059$
$r_2 \ldots$	3,2972	$r_1 \ldots$	3,6556		$+0{,}0060$
$\varrho_2 + u \ldots$	9,6998n	$\varrho_1 + u \ldots$	9,1818n	$x - x' =$	$+0{,}0001$
$\cos t_1 \ldots$	9,8131	$\cos t_2 \ldots$	9,9798	$x' =$	$-2942{,}336$
$\sin t_1 \ldots$	9,8806n	$\sin t_2 \ldots$	9,4743n	$x =$	$-2942\overset{m}{,}336$
	7,7703n		7,7774n		$+0{,}0069$
	7,8378		7,2719		$-0{,}0019$
				$y - y' =$	$+0{,}0050$
				$y' =$	$+3436{,}878$
				$y =$	$+3436\overset{m}{,}883.$

§ 10.

Die Bedingungsgleichungen können in ähnlicher Form, wie beim Rückwärtseinschnitte, auch zur Ausgleichung beim Vorwärtseinschneiden von den Fixpunkten P_i nach dem zu bestimmenden Punkte Q angewendet werden.

Die Messungen auf den Fixpunkten P_i mögen sich als Sätze unabhängiger Richtungsbeobachtungen darstellen lassen. Nachdem sie an die festen Richtungen zwischen den Fixpunkten angeschlossen sind[1]), seien auf P_1, P_2, P_i die nachfolgenden Stationsergebnisse erhalten, die mit den zugehörigen Verbesserungen in die Ausgleichung des Vorwärtseinschnittes einzuführen sind:

1) Ueber den Anschluß an feste Strahlen ist zu vergleichen: Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft etc., herausgegeben von F. R. Helmert. Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Institutes etc. Berlin 1893. S. 45.

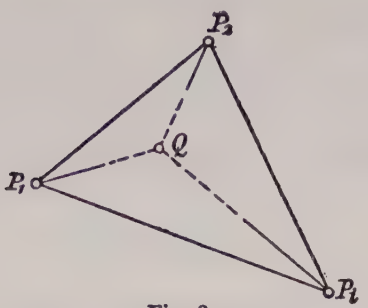


Fig. 3.

$$\text{Auf } P_1 \text{ für die Richtung nach} \left\{ \begin{array}{lllll} P_2 &= A_{1\cdot 2} + u_1 & \text{mit dem Gewichte} & & q_1 \\ Q &= T_1 + v_1 & „ \quad „ & „ & p_1 \\ \ldots & & & & \\ P_i &= A_{1\cdot i} + u_1 & „ \quad „ & „ & q_1 \\ \ldots & & & & \end{array} \right.$$

$$\text{Auf } P_2 \text{ für die Richtung nach} \left\{ \begin{array}{lllll} \ldots & & & & \\ P_i &= A_{2\cdot i} + u_2 & „ \quad „ & „ & q_2 \\ \ldots & & & & \\ Q &= T_2 + v_2 & „ \quad „ & „ & p_2 \\ P_1 &= A_{2\cdot 1} + u_2 & „ \quad „ & „ & q_2 \end{array} \right.$$

$$\text{Auf } P_i \text{ für die Richtung nach} \left\{ \begin{array}{lllll} \ldots & & & & \\ P_1 &= A_{i\cdot 1} + u_i & „ \quad „ & „ & q_i \\ Q &= T_i + v_i & „ \quad „ & „ & p_i \\ P_2 &= A_{i\cdot 2} + u_i & „ \quad „ & „ & q_i \\ \ldots & & & & \end{array} \right.$$

Die A und T sind die ausgeglichenen Stationsrichtungswerthe, u und v die zugehörigen Verbesserungen. Eigentlich ist auf jeder Station noch eine besondere Orientirungsgröße zuzufügen, die jedoch hier weggelassen ist, weil in die Ausgleichung immer nur Richtungsdifferenzen derselben Station eingehen. Stellt man wieder die Seitengleichungen um P_1 auf:

$$\frac{s_2}{s_i} \; \frac{\sin\{(A_{1\cdot i} - T_1) + (T_i - A_{i\cdot 1}) - z_1 + z_i\} \sin(A_{2\cdot 1} - T_2 - z_2)}{\sin\{(T_1 - A_{1\cdot 2}) + (A_{2\cdot 1} - T_2) + z_1 - z_2\} \sin(T_i - A_{i\cdot 1} + z_i)} = 1,$$

worin für

1) $$v_\lambda - u_\lambda = z_\lambda$$

geschrieben wurde, so giebt deren Entwicklung

2) $$\begin{aligned} 0 = K_{i-2} &+ z_1 \cdot r_1 \sin\{(A_{1\cdot i} - A_{1\cdot 2}) + (A_{2\cdot 1} - T_2) + (T_i - A_{i\cdot 1})\} \\ &+ z_2 \cdot r_2 \sin\{(A_{1\cdot i} - T_1) \;\; + (T_i - A_{i\cdot 1})\} \\ &+ z_i \cdot r_i \sin\{(T_1 - A_{1\cdot 2}) \;\; + (A_{2\cdot 1} - T_2)\}. \end{aligned}$$

$$(i = 3 \ldots n)$$

Hierbei ist gesetzt

$$3)\quad \begin{aligned} C_{i-2} &= \frac{\varrho''}{\text{Mod.}} \log \frac{s_2}{s_i} \frac{\sin\{(A_{1.i}-T_1)+(T_i-A_{i.1})\}\sin(A_{2.1}-T_2)}{\sin\{(T_1-A_{1.2})+(A_{2.1}-T_2)\}\sin(T_i-A_{i.1})}, \\ K_{i-2} &= -C_{i-2}r_1\sin\{(A_{1.i}-T_1)+(T_i-A_{i.1})\}\sin\{(T_1-A_{1.2})+(A_{2.1}-T_2)\}, \end{aligned}$$

ferner

$$\frac{r_\lambda}{r_1} = \frac{\sin(A_{1.\lambda}-T_1)}{\sin(T_\lambda-A_{\lambda.1})}.$$

Die Konstanten K kann man wieder wie früher bestimmen. Es sei Q' ein in der Nähe von Q gelegener Punkt; seine Lage sei durch irgend welches Verfahren bestimmt. Die Richtungswerthe von den Fixpunkten nach Q' seien $T_1+\tau_1$, $T_2+\tau_2, \ldots, T_n+\tau_n$, während der Werth der Richtung von dem Fixpunkte P_λ nach P_μ, wie vorher, $A_{\lambda.\mu}$ ist. Dann ist, die τ gleichfalls als kleine Größen erster Ordnung vorausgesetzt,

$$4)\quad -K_{i-2} = \tau_1\cdot r_1\sin P_2Q'P_i+\tau_2\cdot r_2\sin P_iQ'P_1+\tau_i\cdot r_i\sin P_1Q'P_2. \qquad (i=3\ldots n)$$

Wenn die Richtungswerthe auf den Beobachtungsstationen gleichzeitig die Azimute sind, so ist

$$5)\quad A_2 = A_{1.2} = A_{2.1}\pm 180^0 \qquad A_i = A_{1.i} = A_{i.1}\pm 180^0;$$

dadurch gehen (3) und (2) über in:

$$6)\quad \begin{aligned} C_{i-2} &= \frac{\varrho''}{\text{Mod.}} \log \frac{s_2}{s_i} \frac{\sin(T_i-T_1)}{\sin(T_i-A_i)} \frac{\sin(T_2-A_2)}{\sin(T_2-T_1)} \\ K_{i-2} &= C_{i-2}r_1\sin(T_i-T_1)\sin(T_2-T_1) \end{aligned}$$

$$7)\quad \begin{aligned} 0 = K_{i-2}+z_1\cdot r_1\sin(T_i-T_2)+z_2\cdot r_2\sin(T_1-T_i) \\ +z_i\cdot r_i\sin(T_2-T_1). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen folgen auch aus den Gl. (2), (6) und (5) des § 1, wenn man in ihnen

$$t_i = T_i\pm 180^0$$
$$\tau_i = v_i-u_i = z_i$$

setzt.

Wird wie früher

$$8)\quad \begin{aligned} r_1\sin(T_{\nu+2}-T_2) &= \alpha_\nu \\ r_2\sin(T_1-T_{\nu+2}) &= \beta_\nu \\ r_{\nu+2}\sin(T_2-T_1) &= \gamma_\nu \end{aligned}$$

gesetzt, so lauten also die Bedingungsgleichungen:

$$9)\quad \alpha_\nu z_1+\beta_\nu z_2+\gamma_\nu z_{\nu+2}+K_\nu = 0. \qquad (\nu=1\ldots n-2)$$

Bedeuten jetzt $T_1+\tau_1, \ldots, T_n+\tau_n$ die Azimute der Richtungen von den Fixpunkten nach dem Punkte Q', so ist auch

10) $$-K_\nu = \alpha_\nu \tau_1 + \beta_\nu \tau_2 + \gamma_\nu \tau_{\nu+2}.$$

Sind nun x', y' die rechtwinkligen Koordinaten von Q', ferner x_λ, y_λ die Koordinaten des Fixpunktes P_λ, so hat man

$$\operatorname{tang}(T_\lambda+\tau_\lambda) = \frac{y'-y_\lambda}{x'-x_\lambda}, \quad r_\lambda = \frac{x'-x_\lambda}{\cos(T_\lambda+\tau_\lambda)} = \frac{y'-y_\lambda}{\sin(T_\lambda+\tau_\lambda)}.$$

Wenn man sich zur Berechnung der Lage von Q' der Beobachtungswerthe T_1 und T_2 bedient, also z. B. x', y' aus den Gleichungen:

11) $$y'-y_1 = (x'-x_1)\operatorname{tang} T_1 \qquad y'-y_2 = (x'-x_2)\operatorname{tang} T_2$$

bestimmt, dann ist

$$\tau_1 = \tau_2 = 0$$

und

12) $$-K_\nu = \gamma_\nu \tau_{\nu+2}. \qquad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

§ 11.

In den Bedingungsgleichungen (9), § 10, kommen v_λ und u_λ nur in der Verbindung $v_\lambda - u_\lambda = z_\lambda$ vor. Hat nun v_λ das Gewicht p_λ und u_λ das Gewicht q_λ, so hat z_λ das Gewicht

1) $$\frac{1}{\frac{1}{p_\lambda}+\frac{1}{q_\lambda}} = \frac{p_\lambda q_\lambda}{p_\lambda+q_\lambda} = \pi_\lambda.$$

Anstatt also, mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen

$$\alpha_\nu z_1 + \beta_\nu z_2 + \gamma_\nu z_{\nu+2} + K_\nu = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

das Minimum von

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (p_\lambda v_\lambda^2 + q_\lambda u_\lambda^2)$$

herzustellen, ist es einfacher

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \pi_\lambda z_\lambda^2$$

zum Minimum zu machen. Das giebt die nachstehenden Korrelaten- und Normalgleichungen:

$$
2)\quad \begin{aligned}
\pi_1 z_1 &= \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_{n-2} k_{n-2} \\
\pi_2 z_2 &= \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \cdots + \beta_{n-2} k_{n-2} \\
\pi_3 z_3 &= \gamma_1 k_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\pi_4 z_4 &= \cdot \quad \gamma_2 k_2 \quad \cdot \quad \cdot \\
&\vdots \\
\pi_n z_n &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \gamma_{n-2} k_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
3)\quad \begin{aligned}
G_{1.1} k_1 + g_{1.2} k_2 + \cdots + g_{1.n-2} k_{n-2} + K_1 &= 0 \\
g_{2.1} k_1 + G_{2.2} k_2 + \cdots + g_{2.n-2} k_{n-2} + K_2 &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad & \\
g_{n-2.1} k_1 + g_{n-2.2} k_2 + \cdots + G_{n-2.n-2} k_{n-2} + K_{n-2} &= 0,
\end{aligned}
$$

wobei gesetzt wurde:

$$
4)\quad \begin{aligned}
g_{\lambda\cdot\mu} &= \frac{\alpha_\lambda \alpha_\mu}{\pi_1} + \frac{\beta_\lambda \beta_\mu}{\pi_2} = g_{\mu.\lambda} \\
G_{\lambda.\lambda} &= g_{\lambda.\lambda} + \frac{\gamma_\lambda^2}{\pi_{\lambda+2}}.
\end{aligned}
$$

v_λ und u_λ ergeben sich einzeln aus den Gleichungen

$$
5)\quad p_\lambda v_\lambda = -q_\lambda u_\lambda = \pi_\lambda z_\lambda.
$$

Das Azimut der Richtung $P_\lambda Q$ auf P_λ ist $T_\lambda + z_\lambda$, vorausgesetzt, daß die Richtungswerthe A zwischen den Fixpunkten gleichzeitig Azimute sind.

Vermuthlich hat auch Gauß dieselbe oder eine ähnliche Entwicklung der Seitengleichung beim Vorwärtseinschneiden von 3 Punkten aus benutzt. In seinem Nachlaß findet sich auf der letzten unbedruckten Seite in einer Logarithmentafel die folgende Aufzeichnung: „Bestimmung der Lage eines Punktes P^0 aus der Lage dreier anderer P, P', P'', wo jener beobachtet.

A, A', A'' ... beobachtete Azimute

g, g', g'' ... Gewichte

$A+\alpha, A'+\alpha', A''+\alpha''$ ... berechnete Azimute aus einer genäherten Lage

r, r', r'' ... Entfernungen.

Man setze

$$
r \sin(A''-A') = m, \quad r' \sin(A-A'') = m', \quad r'' \sin(A'-A) = m''
$$

$$
\frac{m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha''}{\dfrac{m^2}{g} + \dfrac{m'^2}{g'} + \dfrac{m''^2}{g''}} = k.
$$

Dann sind die verbesserten Azimute

$$A + \frac{mk}{g}, \qquad A' + \frac{m'k}{g'}, \qquad A'' + \frac{m''k}{g''}."$$

Die in der vorstehenden Notiz, die den ersten Anlaß zu diesen Untersuchungen gegeben hat, enthaltenen Formeln ergeben sich aus den Gleichungen (3) und (2) für $n = 3$, wenn man die g bei Gauß in demselben Sinne versteht, wie oben die π, nämlich nicht als Richtungs-, sondern als Winkelgewichte.

§ 12.

Reducirt man auf vermittelnde Beobachtungen, so werden als Fehlergleichungen erhalten, wenn man auch hier

1) $$\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \alpha'_\nu \qquad \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = \beta'_\nu \qquad \frac{K_\nu}{\gamma_\nu} = K'_\nu$$

setzt:

2) $$\begin{array}{rcll} z_1 & = & z_1 \quad \cdot & \text{Gewicht } \pi_1 \\ z_2 & = & \cdot \quad z_2 & \pi_2 \\ K'_1 + z_3 & = & -\alpha'_1 z_1 - \beta'_1 z_2 & \pi_3 \\ K'_2 + z_4 & = & -\alpha'_2 z_1 - \beta'_2 z_2 & \pi_4 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ K'_{n-2} + z_n & = & -\alpha'_{n-2} z_1 - \beta'_{n-2} z_2, & \pi_n \end{array}$$

denen die Normalgleichungen

3) $$\begin{aligned} h_{1\cdot1} z_1 + h_{1\cdot2} z_2 &= L_1 \\ h_{1\cdot2} z_1 + h_{2\cdot2} z_2 &= L_2 \end{aligned}$$

entsprechen. Hierin bedeuten

4) $$\begin{aligned} h_{1\cdot1} &= \pi_1 + \sum_{\nu=1}^{n-2} \alpha'^2_\nu \pi_{\nu+2} \\ h_{2\cdot2} &= \pi_2 + \sum_{\nu=1}^{n-2} \beta'^2_\nu \pi_{\nu+2} \\ h_{1\cdot2} &= \cdot \quad \sum_{\nu=1}^{n-2} \alpha'_\nu \beta'_\nu \pi_{\nu+2} \\ L_1 &= - \sum_{\nu=1}^{n-2} \alpha'_\nu K'_\nu \pi_{\nu+2} \\ L_2 &= - \sum_{\nu=1}^{n-2} \beta'_\nu K'_\nu \pi_{\nu+2}. \end{aligned}$$

Ist die Anzahl der Fixpunkte $= 3$, so geben die Normalgleichungen (3):

$$-\pi_3 \alpha_1' K_1' = (\pi_1 + \pi_3 \alpha_1'^2) z_1 + \pi_3 \alpha_1' \beta_1' z_2$$
$$-\pi_3 \beta_1' K_1' = \pi_3 \alpha_1' \beta_1' z_1 + (\pi_2 + \beta_1'^2 \pi_3) z_2$$

wieder wie vorher

$$\left(\frac{\alpha_1^2}{\pi_1} + \frac{\beta_1^2}{\pi_2} + \frac{\gamma_1^2}{\pi_3}\right) z_1 = -\frac{\alpha_1 K_1}{\pi_1}$$
$$\left(\frac{\alpha_1^2}{\pi_1} + \frac{\beta_1^2}{\pi_2} + \frac{\gamma_1^2}{\pi_3}\right) z_2 = -\frac{\beta_1 K_1}{\pi_2}$$
$$\left(\frac{\alpha_1^2}{\pi_1} + \frac{\beta_1^2}{\pi_2} + \frac{\gamma_1^2}{\pi_3}\right) z_3 = -\frac{\gamma_1 K_1}{\pi_3}.$$

Den Uebergang von den Winkelverbesserungen zu den Koordinatendifferenzen $x-x'$ und $y-y'$ kann man wie folgt erhalten. Die Differentiation der Gleichungen

$$r_\lambda \cos(T_\lambda + \tau_\lambda) = x' - x_\lambda \qquad r_\lambda \sin(T_\lambda + \tau_\lambda) = y' - y_\lambda$$

giebt

$$\cos T_\lambda dr_\lambda - r_\lambda \sin T_\lambda d(T_\lambda + \tau_\lambda) = dx'$$
$$\sin T_\lambda dr_\lambda + r_\lambda \cos T_\lambda d(T_\lambda + \tau_\lambda) = dy',$$

woraus man findet, wenn berücksichtigt wird, daß

$$T_\lambda + \tau_\lambda + d(T_\lambda + \tau_\lambda) = T_\lambda + z_\lambda \text{ und } dx' = x - x'$$
$$dy' = y - y'$$

ist:

$$r_\lambda (z_\lambda - \tau_\lambda) = -\sin T_\lambda \cdot (x - x') + \cos T_\lambda \cdot (y - y')$$
$$d r_\lambda = +\cos T_\lambda \cdot (x - x') + \sin T_\lambda \cdot (y - y').$$

Nimmt man zur ersten dieser Gleichungen noch die folgende hinzu

$$r_\mu (z_\mu - \tau_\mu) = -\sin T_\mu \cdot (x - x') + \cos T_\mu \cdot (y - y'),$$

so wird, wenn gleichzeitig die Richtungsverbesserungen in Sekunden ausgedrückt werden:

$$5) \left\{ \begin{aligned} -r_\lambda \cos T_\mu \cdot (z_\lambda - \tau_\lambda) + r_\mu \cos T_\lambda \cdot (z_\mu - \tau_\mu) &= \varrho'' \sin(T_\lambda - T_\mu) \cdot (x - x') \\ -r_\lambda \sin T_\mu \cdot (z_\lambda - \tau_\lambda) + r_\mu \sin T_\lambda \cdot (z_\mu - \tau_\mu) &= \varrho'' \sin(T_\lambda - T_\mu) \cdot (y - y'). \end{aligned} \right.$$

Setzt man in die Fehlergleichung:

$$z_i = -\frac{1}{\gamma_{i-2}} (\alpha_{i-2} z_1 + \beta_{i-2} z_2 + K_{i-2})$$
$$= \tau_i - \frac{1}{\gamma_{i-2}} \{\alpha_{i-2} (z_1 - \tau_1) + \beta_{i-2} (z_2 - \tau_2)\}$$
$$= \tau_i - \frac{1}{r_i \sin(T_2 - T_1)} \{r_1 \sin(T_i - T_2) \cdot (z_1 - \tau_1) + r_2 \sin(T_1 - T_i) \cdot (z_2 - \tau_2)\}$$

für $\frac{z_1-\tau_1}{\varrho''} = -\frac{\sin T_1}{r_1}(x-x')+\frac{\cos T_1}{r_1}(y-y')$

$$\frac{z_2-\tau_2}{\varrho''} = -\frac{\sin T_2}{r_2}(x-x')+\frac{\cos T_2}{r_2}(y-y'),$$

so bekommt man allgemein

6) $$\frac{z_i-\tau_i}{\varrho''} = -\frac{\sin T_i}{r_i}(x-x')+\frac{\cos T_i}{r_i}(y-y'),$$

also die Form der Fehlergleichungen bei der Ausgleichung nach Koordinaten. Werden umgekehrt in die Gl. (6) für $x-x'$ und $y-y'$ die Werthe aus der Gl. (5) eingesetzt, wobei man gleichzeitig $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ nimmt, so gelangt man wieder zur Gleichung

$$z_i = -\frac{1}{\gamma_{i-2}}(\alpha_{i-2}z_1+\beta_{i-2}z_2+K_{i-2}).$$

Ueber den Potentialfall und die Dissociation in Flammengasen.

Von

Erich Marx.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. März 1900 von Eduard Riecke.

§ 1.

S. Arrhenius hat in einer eingehenden Untersuchung[1]) über die „Electricitätsleitung durch heiße Salzdämpfe" nachgewiesen, daß die Flammenleitung durch Jonen erfolgt, die identisch mit denen der Electrolyse sind. Diese Arbeit fand eine Bestätigung durch die neuerdings erschienene Untersuchung der Herren Smittels, Wilson und Dawson[2]).

Der wesentlichste Unterschied zwischen der Flammenleitung und der wäßriger Lösungen besteht in der Abweichung vom Ohm'schen Gesetz. Nur bis zu etwa 0,1 Volt ist dieses giltig. Der Grund der Abweichung wird sowohl von Arrhenius als bereits früher von Giese[3]) darin gesucht, daß nicht die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes, die Proportionalität zwischen Kraft und Geschwindigkeit, bereits bei geringen electromotorischen Kräften aufhört, sondern daß die geringe Jonenconcentration das Einsetzen des Sättigungsstromes schon bei geringer electromotorischer Kraft bewirkt. Wir bezeichnen mit Giese diese Abweichung vom Ohm'schen Gesetz als „scheinbare". Ist die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes nicht erfüllt, so nennen wir die Abweichung „wahre" Abweichung.

J. J. Thomson[4]) weist in der Theorie der „Leitung der Electricität in Gasen durch geladene Jonen" darauf hin, daß der Bereich ihrer Anwendung sich auch auf die Electricitätsleitung in Flammen erstreckt.

---

1) Arrhenius, Wied. Ann. 42 (1891).

2) Smittels, Dawson und Wilson, Phil. Trans. Royl. Soc. of London, V 193 (1899).

3) Giese, Wied. Ann. 17, 256 (1882).

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. V. Ser. No. 286 (1899) p. 253.

J. J. Thomsons Theorie hat zur Voraussetzung die Giltigkeit der Proportionalität zwischen Kraft und Geschwindigkeit, kann also die Erscheinungen der Flammenelectricität nur so lange beherrschen als die Voraussetzung alleiniger scheinbarer Abweichungen erfüllt ist, als keine wahre Abweichung vom Ohm'schen Gesetze eintritt. Diese Bedingung ist nur sehr eingeschränkt erfüllt und erfüllbar. Die Complication ist die, daß der Sättigungsstrom, der bei geringen electromotorischen Kräften einsetzt, ohne wahre Abweichung vom Ohm'schen Gesetze überhaupt nicht erreichbar ist, und nur bei ganz bestimmter Experimentalanordnung selbst bei nur beginnendem Sättigungsstrom, Beschleunigungen der Jonen zu vermeiden sind.

Wenn wir im Stande sind diese Schwierigkeit zu umgehen, die Grenzen des Einsetzens von Beschleunigungen festzulegen, so lassen sich die Erscheinungen der Flammenelectricität annähernd quantitativ behandeln.

§ 2.

Bevor des Näheren auf die Beschreibung des Apparates eingegangen wird, ist zur Begründung der gewählten Anordnung vorauszusenden: Diese ist veranlaßt durch eine Untersuchung der Flammenleitung im Magnetfelde.

Die Größe des Hall-Effectes läßt sich aus den in Bezug auf die Größenordnung richtigen Werte der Wanderungsgeschwindigkeiten der Jonen in Flammengasen, wie sie von Arrhenius[1]) und Herrn H. A. Wilson[2]) bestimmt wurden, und wie sie sich auch aus dieser Untersuchung auf ganz anderem Wege ergiebt, berechnen. Während der Untersuchung wurden wir auf Erscheinungen geführt, die zeigten, daß die stets vertretene Ansicht, daß wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze erst bei sehr hohen electromotorischen Kräften in Flammengasen auftreten, nicht richtig sein könne; nur so war erklärbar, daß der erreichte Effect stets weit hinter dem berechneten zurückblieb. Wie der Hall-Effect in der aus obigen Componenten zu erwartenden Größenordnung erreichbar ist, wird an anderer Stelle gezeigt; hier dient uns am Schlusse der Abhandlung die Umkehr des Effectes als experimenteller Beleg des Auftretens von Beschleunigungen bei geringen electromotorischen Kräften, deren Existenz wir zunächst auf anderem Wege erweisen.

---

1) l. c.

2) H. A. Wilson, Phil. Trans. London. Roy. Soc. Apr. 1899.

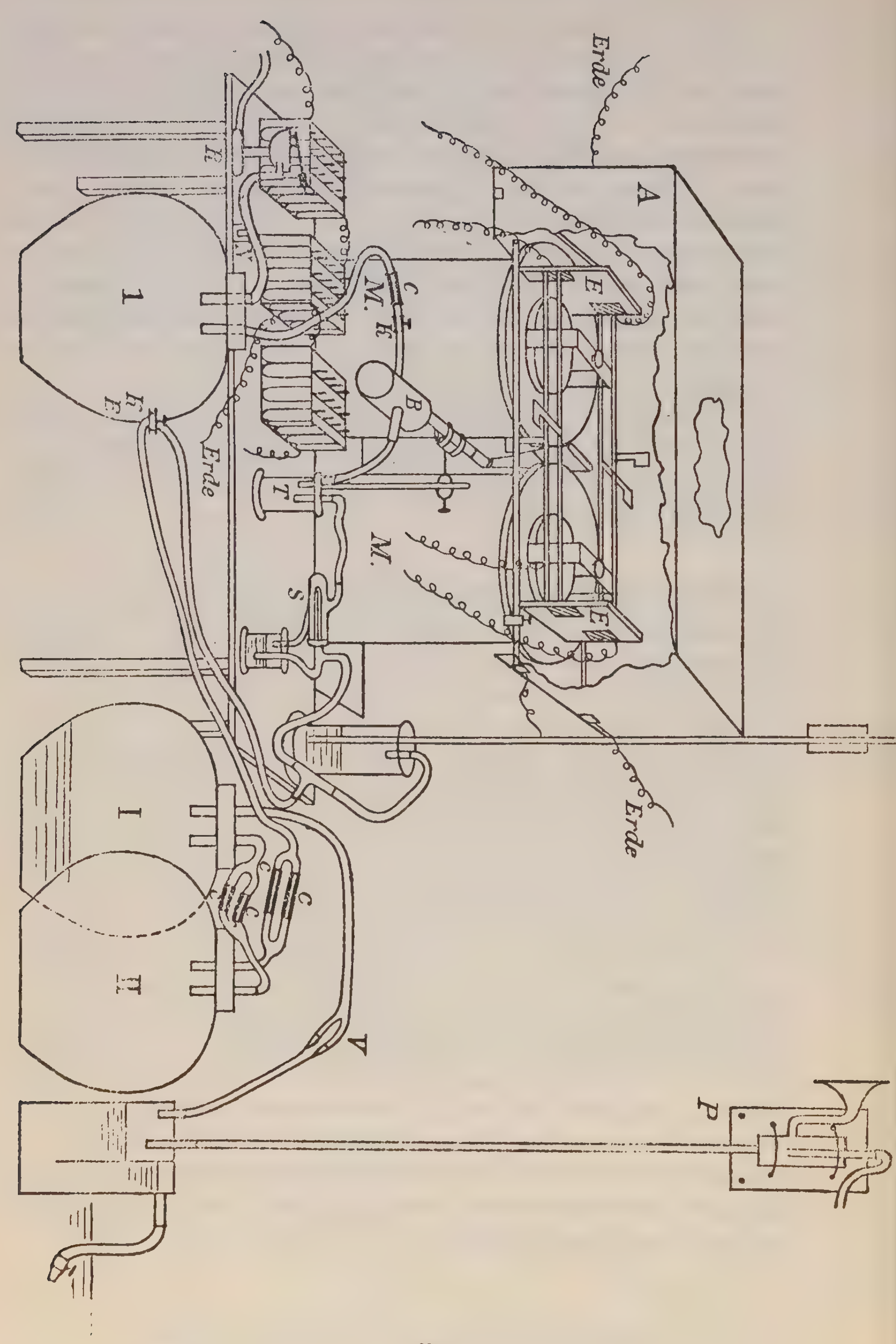


Fig. 1.

§ 3. Beschreibung der Apparate.

1. Apparat zur Erreichung eines Luftdruckes von etwa $^1/_{10}$ Athm., der auf $^1/_{10}$% constant ist.

Die bisher angegebenen Apparate bedienen sich entweder außergewöhnlicher Mittel, wie Dampfpumpen etc., oder reichen nicht aus, wenn der Wasserdruck, der die Luftpumpe speist, nicht von beträchtlicher Größe und Constanz ist. Unsere Construction erfüllt obige Forderung noch etwa 15 Sec. nach vollständigem Aussetzen des Wasserzuflusses und läßt sich sofort in jedem Laboratorium herstellen.

Constructionsprincip: (siehe Fig. 1). In einen Ballon I gelangt durch ein Ventil aus Glasrohr und Gummischlauch Luft von einer Wasserluftpumpe *P*. Der Ballon I communicirt durch Capillaren mit einem Ballon II. Die Capillaren sind so eng, daß stets Ueberdruck in I herrscht. Ist einmal ein bestimmter Druck in I erreicht, so kann dieser beträchtlich schwanken, ohne daß die durch die Capillaren austretende Luftmenge sich wesentlich ändert. Hiernach ist die Figur 1 verständlich.

S ist ein Gouy'scher Zerstäuber [1]), der mit Ballon II ebenfalls durch Capillaren in Verbindung steht, *T* dient zum Abtropfen condencirten Salzstaubes. *K* sind Klemmen; $K_{,,}$ wird vom Galvanometer-Fernrohr aus regulirt.

2. Gaszufuhr und Brenner.

Die Gaszufuhr erfolgt durch den Membranregulatur *R*, durch Ballon 1, die Capillare *C* und Klemme *K*. *B* ist der Schnittbrenner aus Messing und Glas (Fig. 2). Die innere Oeffnung am

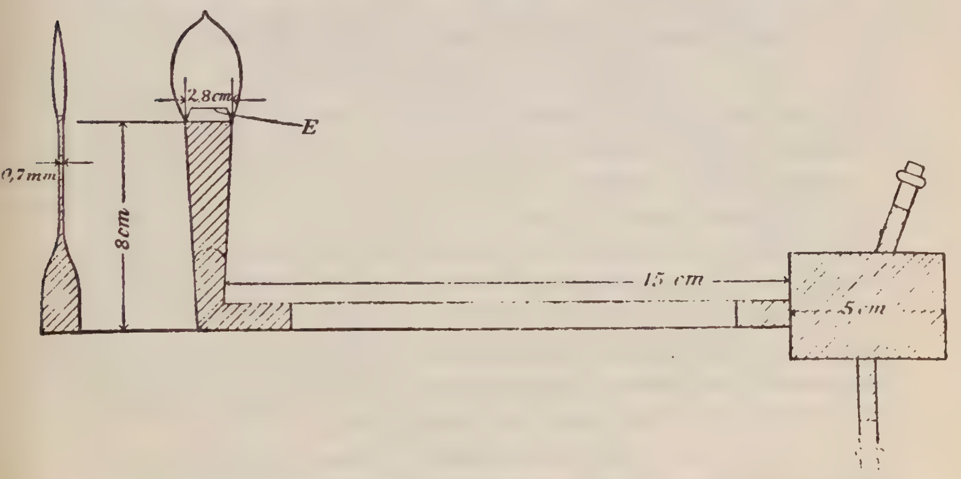


Fig. 2.

1) Gouy, Ann. d. ch. et d. phys. 5. Ser. 18 (23) 1879.

Fuße der Flamme ist 0,7 mm. *E* bezeichnet die Grenze des kalten Gases.

3. **Electrodenhalter und Electroden.** Ersterer aus der Fig. 1 verständlich. *E* sind Holzklötze, die Eboniteinlagen sind schraffirt. Diese isoliren Kupferstreifen, welche Nonien halten (Fig. 3). Die Electroden bestehen aus Netzen; das obere

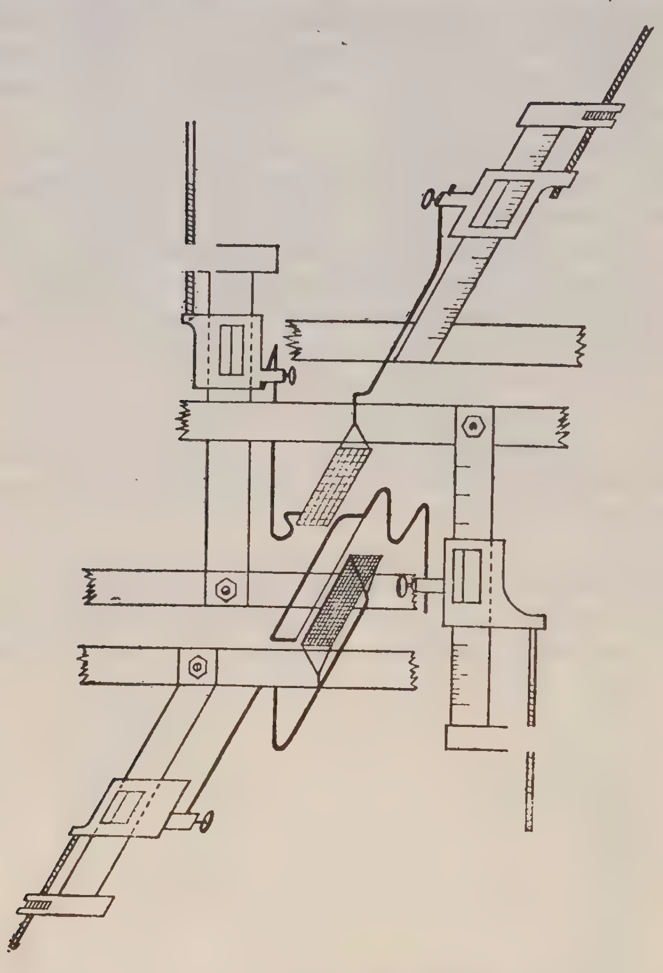


Fig. 3.

mit Maschen von 0,3 mm², das untere mit solchen von etwa 3 mm². Das Electrodengestell ist so eingerichtet, daß durch die horizontalen Nonien die Mittelebene der Klötze geht.

In Fig. 1 ist *A* ein Asbestkasten. Diese Apparate sind an einem Faraday'schen Magnet montirt, dessen Pole für diese Untersuchung entfernt waren.

4. Meßapparate. Da die Messungen, die in Kiel in außerordentlich primitiver Weise begonnen sind, teilweise verwertet wurden, wird stets angegeben, mit welchem Instrumente gearbeitet wurde. In Kiel stand mir in Ermangelung eines empfindlichen Galvanometers zu diesen Untersuchungen ein Schweiger'scher Multiplicator[1]), den ich notdürftig zur Spiegelablesung zurecht machte zur Verfügung. Er besitzt keine Dämpfung, und großes Trägheitsmoment. Eine Luftdämpfung erscheint ohne die Empfindlichkeit des Apparates auf das 500 fache zu erniedrigen, nicht möglich. So dämpfte ich durch Ein- und Ausschalten von Nebenschluß. Die Empfindlichkeit betrug $3.6 \cdot 10^{-9}$ Amp. comm. Ausschl. für 1 Sc.-Teil bei 184 cm Entfernung. Der Widerstand 1580 Ohm. Die mit dem Instrument angestellten Messungen sind bei der Nacht ausgeführt; alsdann ließ sich eine Einstellung auf einige Skalenteile noch erreichen.

In Stockholm hatte ich ein gutes D'Arsouval-Galvanometer zur Verfügung von $5.30 \cdot 10^{-9}$ Amp. comm. Ausschl. für 1 Sc.-Teil bei 78 cm Entfernung. $^1/_{10}$ Sc.-Teil ließ sich gut schätzen. Der Widerstand betrug 213 Ohm.

Das Quadranten-Electrometer, Mascart'scher Construction, wurde peinlichst ausgetrocknet. Die Empfindlichkeit ist stets angegeben; sie änderte sich während der Messung nicht. Der Platin-Dämpfer ist ausgeglüht und so gebogen, daß erst nach $^5/_2$ Perioden Ruhelage eintritt; die H_2SO_4 staubfrei, die Bifilarsuspension, soweit als für die verschiedene Verwendung möglich, zusammengeschraubt.

§ 4. Abhängigkeit des Potentialfalles in Flammengasen von der Temperatur der Anode.

Gemessen wird der Potentialfall zwischen den Electroden bei etwa 17 mm Abstand und 75 Clark Potentialdifferenz. Die Temperatur der Anode wird variirt durch Regulirung der Flammenstellung. Die Begründung der Anordnung und Fragestellung ergiebt sich aus der Theorie der mit ihr erzielten Resultate, diese Messungsreihe ist auf Grund der Erfahrungen vieler anderer angestellt. Dadurch daß sich aus ihr Schlüsse ziehen lassen, welche viele andere unserer Messungen getrennt ergeben, wird die Mitteilung des weitaus größten Beobachtungsmateriales überflüssig.

---

1) Allgem. Litteraturzeitung 1820.

1. Die Schaltung zeigt Fig. 4.

H ist die Hochspannungsbatterie von 75 Clark Elementen geteilt in $-38+37$ Clarks. Einschalter *D* schaltet das Galvanometer *G* mit Nebenschluß *S* in den Electrodenkreis ein und aus. *A* commutirt die Batterie. *E* führt zu den Electroden *F*, und dient zur Empfindlichkeitscontrolle des Electrometers. *J* ist das Electrometer mit der Wippe *B*; *M* der Meßdraht.

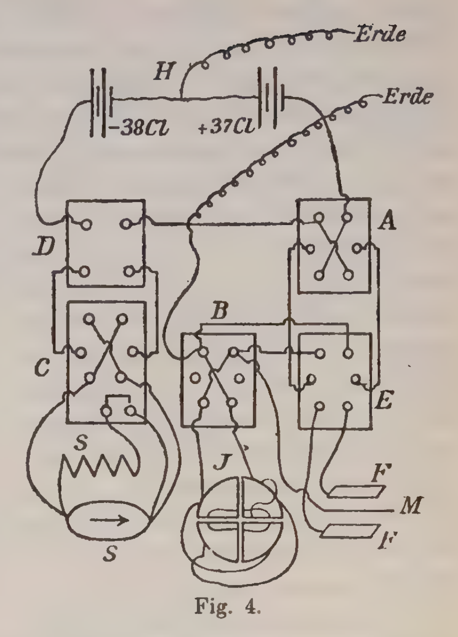


Fig. 4.

Das Electrometer ist in Doppelschaltung, Nadel und ein Quadrantenpaar geerdet. Die Abweichung der aus 4 Beobachtungen zwischen 15 —50 Volt bestimmten Electrometerconstanten beträgt 1,3 % vom Mittel. Außer in der Nähe des Potentials 0 kommen daher die Electrometerabweichungen gegen unvermeidliche äußere Störungen nicht in Betracht.

2. Die Beobachtung erfolgt so: Der Luftdruck wird durch die Klemme $K_{,,}$ (Fig. 1) neben dem Fernrohr auf genau 100 cm H_2O regulirt; eine Visirmarke fixirt die scharfe Grenze des unverbrannten Gases im Innern der Flamme (in Fig. 3 *E*). Diese Regulirung ist außerordentlich empfindlicher, als die an dem Paraffin-Manometer *M* (Fig. 1). Der Nonius des Meßdrahtes wird abgelesen, die Constanz des Electrometers durch Umlegen von *E* ab und zu revidirt, dieses abgelesen und commutirt. Die ganze Beobachtnng einer der angeführten Reihen kann etwa 2 Stunden dauern; etwa 10 Minuten nach Anzündung des Gases ist die Potentialverteilung so stationär, daß nach etwa 2 Stunden annähernd derselbe Wert an der betreffenden Nonius-Stellung gefunden wurde. Die Beobachtung erfolgt von der Kathode beginnend, alsdann die Mitte überspringend zur Anode, und durch die Mitte zurück zur Kathode. Besondere Sorgfalt ist auf Einstellung des Meßdrathes bei Nullstellung an jeder Electrode zu verwenden. Man nähert den Draht durch sehr geringe Verschraubung von der Mitte aus, und liest am Nonius die Stelle ab,

an der das Electrometer sich fest einstellt. Alsdann berührt der Draht die Electrode. Bei den Einstellungen im Electrodenzwischenraum schwankt die Einstellung zwischen etwa 10 Skalenteilen.

Messungen.

Abhängigkeit des Potentialfalles von der Temperatur der Anode.

I. Electrometerconstante $c = 2.57$ (comm. Ausschl.). Kathode: gelb-weiß, Anode: hellrot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mm	0	0.2	0.6	1.1	1.6	5.4	10.4	12.8	14.2	15.2	15.5	16.2	16.5	16.8	17.1
Volt	53.05	49.0	47.8	47.5	47.8	47.6	47.1	47.5	46.4	46.1	45.4	36.1	33.4	±6.4	54.48

II. Electrometerconstante $c = 2.27$. Kathode: gelb-weiß, Anode: mittelrot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mm	+0	0.6	1.1	1.3	7.1	14.1	15.1	16.1	16.5	16.9	—0
Volt	53.05	41.7	36.2	36.3	33.3	27.6	24.1	16.1	±12.1	44.5	54.58

III. Electrometerconstante $c = 2.14$. Kathode: gelb-weiß, Anode: schwachrot.

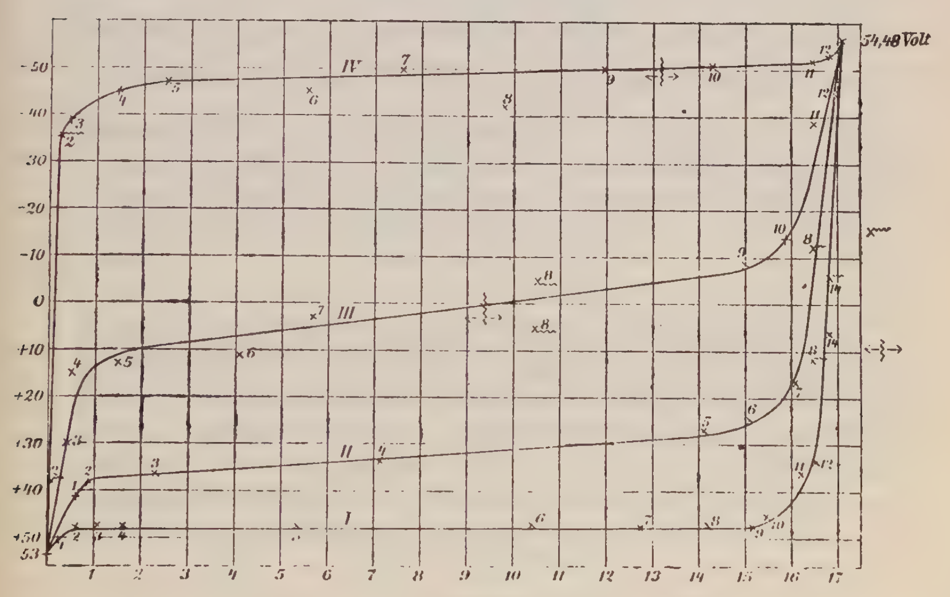
Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
mm	0	0.2	0.3	0.4	0.6	1.5	4.1	5.7	10.8	15.3	16.2	16.8	17.2	17.4
Volt	53.05	48.1	48.1	30.2	15.0	13.5	11.1	±2,1	±2.8	8.8	15.0	89	44.0	54.48

IV. Electrometerconstante 3.84. Kathode: gelb-weiß, Anode: ganz schwachrot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
mm	0	0	0.1	0.2	1.5	2.6	5.6	7.6	9.8	11.9	14.4	16.6	17.0	17.3
Volt	53.05	49.6	38 0	39.3	45.4	47.0	44.4	50.0	42	50.5	51.3	52.0	53.8	54.4

Tafel 1 enthält I—IV graphisch.

Diese Curven legen wir einer eingehenden Discussion zu Grunde.



Tafel 1

§ 6. Theorie und Discussion der Messungen des Potentialverlaufs in Flammengasen in seiner Abhängigkeit von der Temperatur der Anode.

A. Angenommen die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze sei nur scheinbar (cf. § 1).

1. Alsdann sei e die Ladung eines Jons n_1, n_2 die Anzahl im Einheitsvolumen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Geschwindigkeiten im Potentialgefälle 1, $-\frac{d\varphi}{dx}$ das Gefälle, i der Strom durch die Einheitsfläche, q die im Einheitsvolumen erzeugte, $\alpha n_1 n_2$ die durch Recombination verschwindende Jonenzahl, so ist nach Poisson

1) $$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi(n_1 - n_2)c$$

und an den einzelnen Electroden die freie Electricität

2) $$-\frac{d}{dx}\left(\varkappa_1 n_1 \frac{d\varphi}{dx}\right) = q - \alpha n_1 n_2$$

und

3) $$+\frac{d}{dx}\left(\varkappa_2 n_2 \frac{d\varphi}{dx}\right) = q - \alpha n_1 n_2$$

und der Strom

4) $$i = -(\varkappa_1 n_1 + \varkappa_2 n_2)\frac{d\varphi}{dx} \cdot e.$$

In einem Querschnitt in der Entfernung λ von der positiven Electrode passiren nun $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \frac{i}{e}$ positive Jonen. Da nicht mehr positive Jonen passiren können, als $(q - 2n)$, d. h. der Ueberschuß der zwischen Schnittfläche und Kathode in der Sec. erzeugten, über die durch Recombination verschwindenden Jonen, so folgt

5) $$\lambda_{1_2} \geqq \frac{i \cdot \varkappa_{1_{(2)}}}{\varkappa_{1_{(2)}} + \varkappa_{2_{(1)}}} \frac{1}{q \cdot e}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn gar keine Recombinationen eintreten, $\alpha = 0$ ist. Solange $q > \alpha$ haben wir freie Electricität an den Electroden und der zweite Differentialquotient des Potentiales nach der x-Axe wird endlich. Für die Strecken, bis zu welchen dies der Fall ist, sind Recombinationen stets dann sehr unwahrscheinlich, wenn der Potentialfall an den Electroden wesentlich größer ist, als zwischen diesen [1]). Streng richtig wird Glei-

1) J. J. Thomson, l. c. pag. 259.

chung 5) erst dann, wenn die Polarisationsgebiete an den Electroden im Wendepunkte der Potentialgradienten-Curve zusammenstoßen.

Außerhalb dieser Schichtdicken λ, in der Mitte zwischen den beiden Electroden ist der Potentialabfall constant, so daß nach 1) und 2)

$$\sqrt{\frac{q}{\alpha}} = n$$

und nach 4)

6) $$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_m = \left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{e(\varkappa_1 + \varkappa_2)}.$$

Für diese Schichtdicken λ folgt durch Integration von 1), indem die Constante aus der Bedingung $x = \lambda$ bestimmt wird [1])

7) $$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{1(2)}}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_m} - 1 = \frac{4\pi c}{\alpha} \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} (\varkappa_1 + \varkappa_2),$$

wo die Indices 1(2) für die positive resp. negative Electrode gelten, und die eingeklammerten Ziffern eine analoge Gleichung für die zweite Electrode darstellen. Aus den Gleichungen 7) folgt

8) $$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_1 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_m}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_m}}$$

und aus 5)

9) $$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

So lange die Proportion 8) und 9) constant bleibt, ist keine Aenderung des Geschwindigkeitsverhältnisses der Jonen eingetreten.

2. In der Flamme kommt nun zu den Geschwindigkeiten der Jonen einmal additiv, das andere Mal subtraktiv die des Gasstromes hinzu. An keinem der Schlüsse, die wir hier ziehen, wird hierdurch etwas verändert. Gleichung 5) lehrt, daß die Schichtdicken λ mit abnehmender Jonenconcentration q ceteris paribus wachsen. Ist die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes nicht erfüllt, so daß

$$\varkappa_{1(2)} = uF\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{(2)1}$$

1) J. J. Thomson, l. c. pag. 261.

ist, und F eine mit dem Potentialfall wachsende Function ist, so könnte hierdurch eine Vergrößerung der λ an einer Electrode bedingt sein; dann aber müßte nach Gleichung 4) der Strom zunehmen, da $\varkappa_1$ größer geworden ist.

3. Wir betrachten nun unsere Messungen. Von I auf II ist die Summe der Schichtdicken $\lambda_1 + \lambda_2$ beträchtlich gewachsen. Die Messung des Stromes ergiebt, daß dieser abgenommen hat. Demnach beruht das Anwachsen von $\lambda_1 + \lambda_2$ in Curve II gegenüber Curve I, auf Verringerung der Jonenconcentration q der Flamme, auf Zunahme des Sättigungsstromes mit Abnehmen der Temperatur der Anode und sofort folgt aus Curve I und II.

I. Die Jonenconcentration der Flamme ist eine Function der Temperatur der Electroden und nimmt mit sinkender Temperatur ab.

4. Betrachten wir Curve I—IV so ist ersichtlich, daß zunächst das Verhältnis $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, das unter Annahme des Ohm'schen Gesetzes nach 8) das Verhältnis der Wanderungsgeschwindigkeiten im Potentialgefälle 1 darstellt, (hier, durch den Gasstrom im Zähler und Nenner durch die gleiche Constanz modificirt ist) in Curve I etwa $^1/_4$ beträgt, in II annähernd constant geblieben, in Curve III annähernd 1 geworden ist, und bei IV in einen unechten Bruch übergeht. Also hat sich das Geschwindigkeitsverhältnis der Jonen geändert und es folgt:

II. Sinkt die Temperatur der Anode unter eine gewisse Grenze, so erleidet das positive Jon Geschwindigkeitserhöhungen, die so groß werden, daß die unter annähernd gleichem Potentialfall zurückgelegten Strecken (Curve III) annähernd gleich werden. Bei noch tieferer Temperatur der Anode dreht sich das Verhältnis der Strecken um (Curve IV).

In III und IV ist also die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes nicht mehr erfüllt, wir haben wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz.

B. Die wahre Abweichung vom Ohm'schen Gesetze.

1. Die Beschleunigungen des positiven Jons in Fall III und IV können 2 unabhängige Ursachen haben. Die Reibungswiderstände, die nach der kinetischen Gastheorie der Temperatur proportional wachsen, reichen nicht mehr aus, die Stromarbeit zu vernichten, wenn die Temperatur an einer Electrode unter eine ge-

wisse Grenze sinkt; andererseits, ist die Temperatur hoch genug und constant, so kann die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes dann überschritten werden, wenn der Potentialfall zu groß wird. Versuchen wir aus kinetischen Vorstellungen die zulässige Größe des Potentialfalls zu berechnen, wenn die Kathode auf einer Temperatur von etwa 2000° (annähernd weißglühendes Platin) ist. Wir bemerken, daß solche Rechnungen des öfteren ausgeführt sind, um zu beweisen, daß die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze selbst bei electromoterischen Kräften von 80 Clark pro cm bei der Flammenleitung nur scheinbar ist. Wir werden zeigen, daß bei gleichtemperirten Electroden schon bei wenigen Volt Beschleunigungen auftreten.

2. Wir betrachten, wie in der Gastheorie üblich ist, die Reibung eines Jons als verursacht durch Zusammenstöße mit Gasmolekeln und wiederholen unter Zugrundelegung einer Formel von Steffan[1]) eine von Arrhenius[2]) angestellte Betrachtung.

Die Bewegungsgröße die n_1 Kugeln mit der Geschwindigkeit $\xi_1 + n_1$, η_1 und ζ_1 an n_2 Kugeln mit der Geschwindigkeit $\xi_2 + n_2$, η_2 und ζ_2 abgeben, wenn s die Summe der Radien beider Kugeln ist, m_1, m_2 ihre Masse, r_1 die relative Geschwindigkeit beider Systeme bezeichnet, ist nach Steffan[1])

$$10)\qquad W = \pi . s^2 . \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} \sum n_1 n_2 r' (\xi_1 - \xi_2') + (n_1 - n_2),$$

wo

$$r_1 = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2 + n_1 - n_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2}$$

ist.

Es sei $\xi_1 - \xi_2 = \xi$, die relative Geschwindigkeit eines Molekels zu den Molekeln seiner Umgebung, und $n_1 - n_2 = n$ die durch den Potentialfall hinzukommende Geschwindigkeit. Entwickelt man r_1 nach Taylor, und setzt in 10) ein, so vereinfacht sich die Reihe dadurch, daß

$$\sum n_1 n_2 r \xi = 0$$

wird, weil für dasselbe r so viel positive wie negative ξ existiren. Aus demselben Grunde werden alle Glieder

$$\sum n_1 n_2 r^b \xi^{2a+1} = 0$$

1) Steffan, Wien. Ber. 65. 355. Abth. 2, 1872.

2) Arrhenius, l. c. oder Bih. tilt K. Sv. Ak. Handl. p. 41, Bd. 16.

wo a und b ganze Zahlen sind. Weiter wird

$$\sum \frac{n_1 n_2}{r^b} \xi^2 = \frac{1}{3} \sum n_1 n_2 r^{2-b}; \quad \sum \frac{n_1 n_2}{r^{5+b}} \xi^4 = 3 \sum \frac{n_1 n_2}{r^{5+b}} \xi^2 . \eta^2$$

$$= \frac{1}{5} \sum \frac{n_1 n_2}{r^{1+b}} \text{ [1)]},$$

so daß wir erhalten

$$\text{11)} \quad W = \pi s^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sum n_1 n_2 r \left\{ \frac{4}{3} n + \frac{4}{15} \frac{n^3}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{n^5}{r^4} + \cdots \right\}.$$

Solange n gegen r klein ist, ist die bei dem Stoß verlorene Bewegungsgröße W der Geschwindigkeit proportional.

Betrachten wir nun die Jonen in der Flamme. r bezeichne die Geschwindigkeit eines Jons gegen die Molekeln der Umgebung, n die durch den Potentialfall hinzukommende Bewegungsgröße.

Nehmen wir eine Temperatur von 2000° in der Nähe der Kathode an; das Moleculargewicht der Verbrennungsgase berechnet sich aus den Componenten im Mittel zu 29, so wird die relative Geschwindigkeit des OH-Jons gegen die Molekeln der Verbrennungsgase

$$r = 1730 \sqrt{\frac{29}{27.1} + \frac{29}{17}} = 2983 \frac{\text{m}}{\text{sec.}},$$

indem wir die Geschwindigkeit der Verbrennungsgase zu 1730 $\frac{\text{m}}{\text{sec.}}$, einer Temperatur von 2000° entsprechend, setzten. Nehmen wir also $r = 2983 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$, so wird $\frac{n^3}{r^2} \cdot \frac{4}{15}$ gegen $\frac{4}{3} nr$ schon bei niederen Potenzen von r zu vernachlässigen sein. Für $n = \frac{r}{2}$ wird (das zweite Glied) $B = \frac{1}{20} A$, für $\frac{1}{3} r = \frac{1}{405} A$. Wenn wir demnach eine Geschwindigkeit von $1000 \frac{\text{m}}{\text{sec.}}$ zulassen, können wir noch lineare Proportionalität zwischen Geschwindigkeit und Kraft erwarten, d. h. Giltigkeit des Ohm'schen Gesetzes.

Herr Wilson[2]) fand für die Geschwindigkeit des negativen Jons $1000 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$ für 1 Volt. Arrhenius berechnet einen etwa 10 Mal kleineren Wert aus Ostwald's Gesetz und einer Diffusionsregel.

1) Ein einfacher Beweis bei Arrhenius l. c.

2) l. c.

Nehmen wir $1000 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$ als richtig an, so dürfte danach noch ein Potentialfall von $100 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ oder $10 \frac{\text{Volt}}{\text{mm}}$ die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes nicht beeinflussen. Ist die Anode bedeutend kälter als die Kathode, so wird natürlich das Gefälle an dieser nur geringer sein dürfen.

Wir betrachten nunmehr den Potentialverlauf bei ± 1 Cl zwischen 2 Electroden von 17 cm Entfernung.

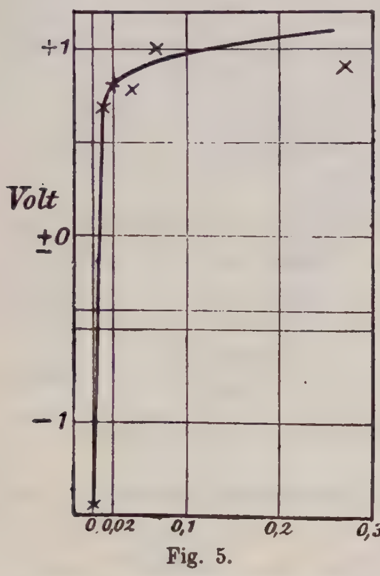


Fig. 5.

Figur 5 stellt den Beginn dar. Beide Electroden sind gelbglühend. Der Potentialfall an der Kathode beträgt $253 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$. Es folgt

III. Bei gleich temperirten Electroden sind schon bei Potentialdifferenzen von etwa 2 Volt, wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze wahrscheinlich.

Da wir die Temperatur so hoch wie angängig wählten, ist Satz III für Flammengase unabhängig von der Temperatur.

3. Kehren wir nun zur Betrachtung von Tafel I zurück. Hier ist stets die Anode wesentlich kälter als die Kathode. Der Potentialfall bei I beträgt $1816 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$, bei II $748 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$, überschreitet demnach beträchtlich die Grenze, innerhalb welcher nach obiger Rechnung die Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes erfüllt bleibt. Bei I und II ist, trotz des sehr verschiedenen Potentialfalles das Verhältnis $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ annähernd gleich geblieben. Es erscheint also möglich, daß die obige Grenze von $100 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ zu klein ist, sehr wahrscheinlich daß noch bei viel höherem Potentialfall der Geschwindigkeitszuwachs klein gegen die Geschwindigkeit ist; hierauf kommen wir später zurück.

C. Potentialfall und freie Electricität an den Electroden.

1. Die Integration der Poisson'schen Gleichung 1) ergiebt

$$\frac{d\varphi}{dx} = -4\pi\int e(n_1 - n_2)\,dx + C = -4\pi\int \varrho dx + \zeta.$$

Zwischen den Banden λ ist der Potentialfall linear, also $\varrho = 0$ und

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_m = C,$$

also ergiebt

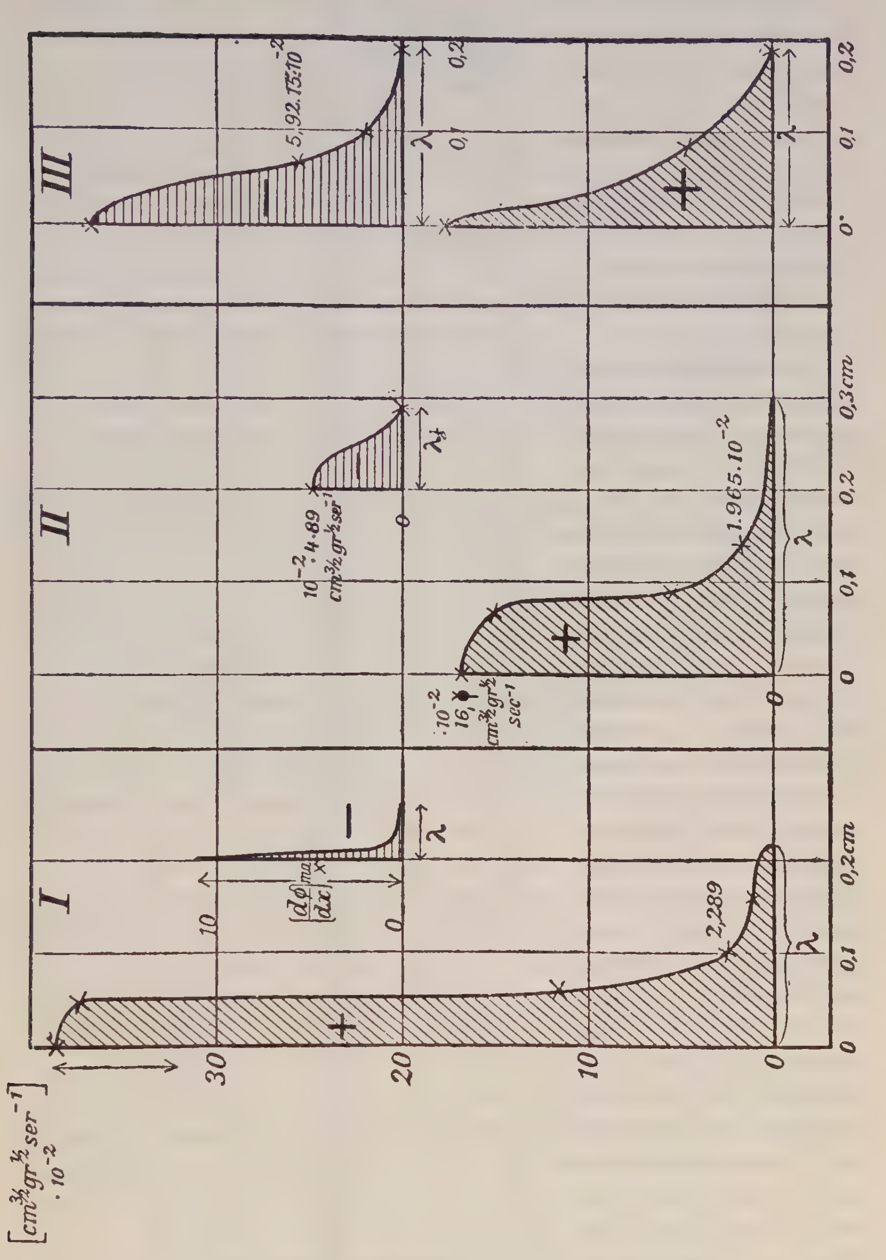
12) $$\int \varrho dx = -\frac{\left[\frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_m\right]}{4\pi}$$

die freie Electricität an den Electroden. Die Fläche der Electroden beträgt bei uns 0,8056 qucm. Messen wir also den Potentialfall in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ an irgend einer Stelle unserer Curve, subtrahiren den Abfall $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_m$, und multipliciren mit $\frac{0{,}8055 . 4\pi}{300}$, so erhalten wir die Größe der freien Electricität an der betreffenden Stelle in absolutem Maße.

2. In Tafel 2a u. b stellen die schraffirten Flächen die Electricitätsmengen in absolutem Maße dar, welche in Fall I bis IV (Tafel 1) unserer Messung an den Electroden angehäuft waren.

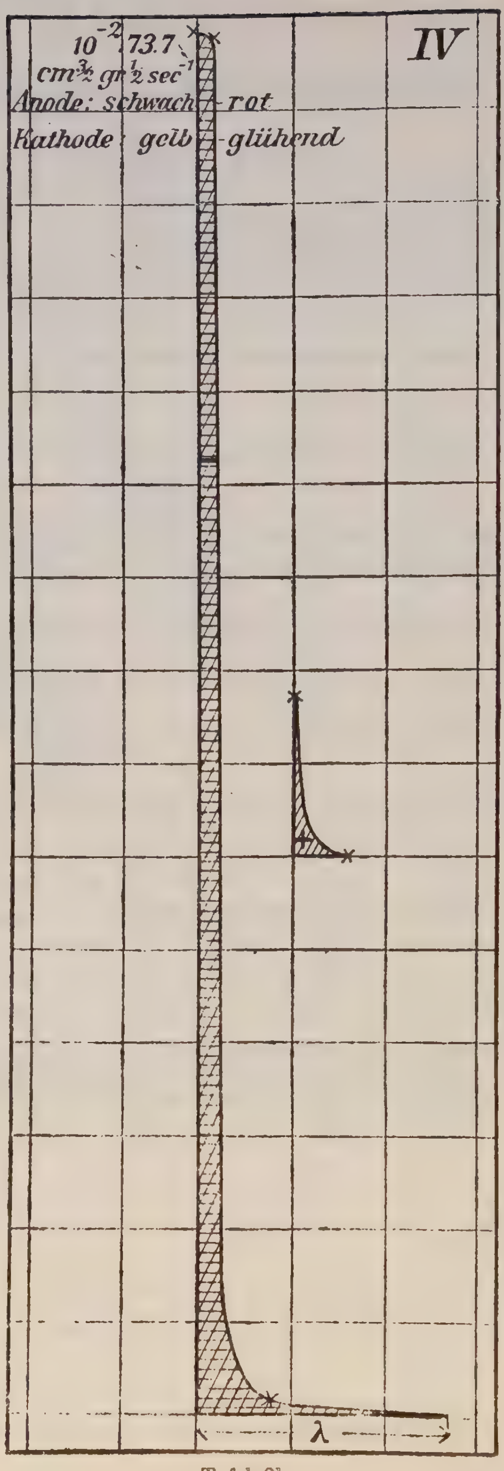
Ein gewisser Spielraum in der genauen Messung des Potentialfalles an den Electroden und der Schichtdicken λ beeinflußt unsere Betrachtungen in keinem Punkte. Die richtige Zeichnung erleichtert Beziehung 8) und 9), hiernach erhalten wir bei Verbindung des Endes der größten Ordinate mit dem der größten Abscisse annähernd ähnliche Dreiecke.

Sofort ist ersichtlich.



Tafel 2a.

IV. Die Größe der freien positiven Electricität an der Kathode nimmt ab, wenn die Temperatur der Anode sinkt. Gleichzeitig nimmt die freie negative Electricität an der Anode zu.



Tafel 2b.

Die Temperatur der Kathode ist bei I—IV annähernd gleich geblieben; der Betrag des Anwachsens der negativen Electricität dürfte nach Tafel II etwa der der Abnahme der positiven Electricität sein. Da nun [etwa aus 8), 9) und 12)] ersichtlich ist, daß an den einzelnen Stellen zwischen den Electroden die Größen der positiven resp. negativen Electricitätsmengen annähernd umgekehrt proportional den Geschwindigkeiten der beiden Jonen sind, so wäre demnach möglich, daß die Aenderung der freien positiven Electricität auf Beschleunigungen der positiven Jonen beruht. Von I auf II ist aber der Sättigungsstrom gewachsen, die Stromstärke hat abgenommen; oben zeigten wir, daß bei Einsetzen

von Beschleunigungen bei gleicher Jonenconcentration der Strom wachsen müsse. Also ist die Abnahme der freien positiven Electricität sicher zum Teil nicht durch Einsetzen von Beschleunigungen, sondern durch Abnahme der Concentration der Flamme für positive Jonen verursacht.

Also: Nimmt die Temperatur der Anode ab, so nimmt die Jonenconcentration im Flammenvolumen ab; an den Electroden vermehrt sich gleichzeitig die freie negative Electricität unter Verringerung der freien positiven Electricität. Diese Thatsachen lassen nur die eine Deutung zu, daß mehr Jonen von der wärmeren Electrode in die Flamme treten als von der kälteren. Also folgt:

V. Der Dissociationsgrad der Flamme für die positive resp. negative Jonenart ist wesentlich mitbedingt durch die Temperatur der betreffenden Electrode.

Herr H. A. Wilson[1]) wurde zu dem gleichen Schlusse auf ganz anderem Wege geführt. Er zeigte unter anderem, daß der Strom bei Vergrößerung der Entfernung der Electroden sich nicht ändert, wenn die Temperatur der Electroden sich nicht ändert. Vielleicht ließ sich dieses und ähnliche Experimente aus der Theorie des Sättigungsstromes allein erklären; kann doch bekanntlich bei Sättigungsstrom ceteris paribus bei Entfernung der Electroden der Strom sogar wachsen. Die Abnahme der freien positiven Electricität bei Abnahme der Temperatur der Anode ist aber in der That nicht anders als durch die, zuerst von Herrn Wilson vertretene Hypothese erklärbar.

3. Nach Gleichung 4) ist der Strom der Jonenconcentration und der Geschwindigkeit der Jonen proportional; demnach folgt aus Satz V, daß die Umkehr des Zeichens der Electroden nicht den gleichen Strom liefern wird, wenn die Electroden verschieden temperirt sind, und die Wanderungsgeschwindigkeiten beider Jonen verschieden sind.

Diese Erscheinung, die man als unipolare Leitung (Hittorf) zu bezeichnen pflegt, liefert demnach ein ungeheuer empfindliches Mittel Isothermen (oder Isothermenverschiebung) in der Flamme zu bestimmen. Denn aus V in Verbindung mit Gleichung 4 ist ersichtlich.

VI. In der Flamme liegen die Stellen fehlender unipolarer Leitung auf Isothermen.

1) l. c.

§ 7. Bestimmung der Grössenordnung der Wanderungsgeschwindigkeiten aus dem Potentialverlauf.

1. Wir haben also die Grenze, bis zu welcher bei einer Temperatur von etwa 2000° die Kraft anwachsen kann, ohne daß die Jonen Beschleunigungen erfahren, zu etwa 100 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ bestimmt (S. 47). Wir zeigten, daß bei gleichtemperirten Electroden, bei einer Potentialdifferenz von 2.8 Volt, bei 1.7 cm Electrodenentfernung diese Grenze um mehr als 200 % überschritten wird (S. 47) und wiesen (S. 47) darauf hin, daß es wahrscheinlich ist, daß noch bei etwa 10 Mal größerem Potentialfall die Beschleunigungen klein gegen die Geschwindigkeiten sind.

Aus Gleichung

$$\text{12)} \qquad \int \varrho dx = -\frac{\left[\frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_m\right]}{4\pi}$$

folgt, daß wenn wir ein Mittel anwenden, die freie Electricität an einer Electrode zu neutralisiren, daß alsdann an dieser Electrode der Potentialfall abnimmt $\left[\text{denn } \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_m \text{ ist stets sehr klein gegen } \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right]$. Ein solches Depolarisationsmittel liefert Satz IV. Wir halten die Temperatur der Anode wesentlich niedriger, als die der Kathode, alsdann nimmt die freie positive Electricität an der Kathode ab. Mithin nimmt nach 12) der Potentialfall an der Kathode ab, und da die freie negative Electricität zunimmt (Satz III), wächst der Potentialfall an der Anode.

2. Obige Grenze für die Giltigkeit der Grundannahme des Ohm'schen Gesetzes von 100 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ erweitert sich bei constanter Temperatur umgekehrt proportional der Geschwindigkeit des zu betrachtenden Jons im Potentialfall 1.

Andererseits folgt, daß für ein im Potentialfall 1 sich wesentlich langsamer bewegendes Jon, die Temperatur des umgebenden Gases (Relativgeschwindigkeit zu den Nachbarmolekel) wesentlich geringer sein kann als 2000°, wenn wir obige Grenze des Potentialfalls einhalten.

Aus allen bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß die Geschwindigkeit des positiven Jons beträchtlich geringer, als die des negativen ist; die Temperatur der Anode darf demnach geringer als die der Kathode sein.

3. Aus der Gleichung 6), die für die Strecke linearen Po-

tentialverlaufs giltig ist, berechnen wir α; aus Gleichung 5) die für die Gebiete wahrer Electricität gilt, folgt

$$q = \frac{i}{e(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2}.$$

Für die Stelle des Zusammenstoßens des Gebietes freier Electricität mit dem ohne, folgt demnach durch Einsetzen in 7)

13) $$\varkappa_{2_1} = \frac{4\pi i \lambda_1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_{1_2} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_m}.$$

Streng richtig wird die Gleichung natürlich erst, wenn der Sättigungsstrom erreicht ist; sie bildet alsdann einen Specialfall einer Formel von J. J. Thomson[1]).

4. Gleichung 13) gilt unter Voraussetzung alleiniger scheinbarer Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze für ein Gas, auf dessen Jonen keine anderen Kräfte als die electromotorischen wirken, die die Potentialdifferenz an den Electroden verursachen. In der Flamme sind die Verhältnisse complicirter. Nicht nur die Jonen im Gase, sondern das Gas selbst ist in Bewegung; und dann; auch den Flammengasen kommt eine gewisse Leitfähigkeit zu. Angenommen wir treffen die Anordnung so, daß die Jonen keine Beschleunigungen erfahren, und bestimmen aus dem Potentialfall die $\varkappa$. Alsdann ist $\varkappa$ eine aus Jonengeschwindigkeit und Gasbewegung im Potentialfall 1 resultirende Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit des Gases durch Umkehr der Electroden zu eliminiren, so daß sie einmal mit, das andere Mal gegen die Jonenbewegung gerichtet ist, also daß $\varkappa$ einmal $v + g$, das andere Mal $v - g$ ist, stößt auf Schwierigkeiten, weil wir nach Satz III stets Beschleunigungen auch bei sehr geringen electromotorischen Kräften erhalten, wenn die Anode auf beträchtlich höherer Temperatur als die Kathode ist.

Also bestimmen wir hier die Größenordnung der Jonengeschwindigkeiten, die aus Jonenbewegung und Gasbewegung resultiren.

Punkt 2. Auch in der reinen Flamme existirt ein Potentialfall. Man kann sich leicht überzeugen, daß selbst bei Zerstäubung von $^1/_{60}$ n Lösungen bei Electroden, die nur rotglühend sind der Potentialfall der Flamme wesentlich durch diese geringe Jonenconcentration bedingt ist. Hiernach dürfte es berechtigt sein, bei viel stärkeren Concentrationen den Potentialfall als wesentlich durch den Salzdampf bedingt anzusehen, und anzunehmen, daß

1) l. c. pg. 265.

eine eventuell durch die reine Flamme hinzukommende Correction, die Größenordnung des $\varkappa$ nicht verändert*). Die viel wesentlicher in Betracht kommende Leitfähigkeit der Flamme berücksichtigen wir, wie üblich durch Subtraction von der der gefärbten.

5. Trotzdem wir bei all diesen Schwierigkeiten nichts als eine grobe Näherung erwarten können, ist es nicht ohne principielles Interesse die Größenordnung der Geschwindigkeiten nach Formel 13) zu bestimmen, und mit den von anderer Seite angegebenen, die auch kaum mehr als die Größenordnung geben, zu vergleichen.

Arrhenius schätzte die Geschwindigkeit des OH Jons etwa 10^5 Mal größer als im Electrolyt, Herr Wilson giebt einen noch 10 Mal größeren Wert an. Letzterer maß die E. K., die notwendig ist um ein Jon gegen den Gasstrom zutreiben. Arrhenius extrapolirte aus Ostwalds Verdünnungsgesetz und einer Diffusionsregel von Loschmidt.

6. Für die nunmehr anzuführenden Messungen ist die Schaltung, die der Figur 4, nur daß die Potentialdifferenz an den Electroden ± 2 Cl beträgt. In Folge dessen müssen wir auf die Vorteile der Doppelschaltung verzichten, und laden die Nadel. Wir benutzten Quadrantenschaltung, und erden einmal das eine, dann das andere Paar. Die Bifilarsuspension ist an der Verstellung fast vollständig zusammengeschraubt, die Dämpfung so gebogen, daß nach $^5/_2$ Perioden Ruhelage eintritt. Die Ausschläge sind nach Hallwachs[1]) Formel in Volt umgerechnet. Die Flamme resp. die Electrodenstellung in dieser, ist so regulirt, daß der Potentialfall an der Kathode nach Möglichkeit verringert ist (Satz III), ohne daß die Temperatur der Anode unter die der Rotglut sinkt.

Es läßt sich hier bei Quadrantenschaltung vorzüglich demonstriren, wie durch eine Vergrößerung der Gaszufuhr, die ohne Fernrohr am Paraffinöl-Manometer gar nicht, wohl aber an der scharfen Grenze des unverbrannten Gases (in Fig. 3, E) wahrnehmbar ist, in Folge der Erhöhung der Temperatur der Anode, die Jonenproduction an dieser derart wächst, daß das Potential in einem wesentlich positiven Gebiete sofort umschlägt.

Die Ausführung der Messung und Manipulationen ist oben beschrieben. Wir betrachten zunächst 3 Messungsreihen für Kalium.

1) Hallwachs, Wied. Annal. 29, 1886.

*) Anmerkung während der Correctur: Aus der inzwischen fertiggestellten Untersuchung über den Hall-Effect, ergiebt sich, daß dieser für die reine Flamme wesentlich größer als für die concentrirte K.-Flamme ist. Der Schluß, der hieraus folgt, daß die Träger der pos. Electricität in der reinen Flamme langsamer als in der gefärbten wandern, läßt sich auch aus dem Potentialfall erweisen.

Messungen.

I. Electrometerconstante 0.4109 (max. Fehler $^1/_2$ % aus 3 Beob.; vollst. zu vernachl. gegen äußere Störungen).
$^1/_{20}$ *n* KCl. Kaihode: weiß-glühend; Anode: dunkelrot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0
mm	—0	19.7	19.5	19.3	19.2	19.1	19.0	17.5	16.9	15.0	12.5	10.0	7.5	5	2.5	1.5	1.0	0.8	0.5	0.4	0.2	0	0
Volt	— 2.869	— 27.6	— 1.98 — 1.08	— 0.78 + 0.85	+ 0.30	+ 0.54	+ 1.02	+ 0.06	+ 0.89	+ 1.03	+ 0.84	+ 1.02	+ 1.60	+ 1.34	+ 1.78	+ 1.76	+ 1.87	+ 2.00	+ 2.16	+ 2.00	+ 2.07	+ 2.85	2.869

Potentialfall an der Kathode in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}} \sim \frac{3.2}{0.1}$ | Stromfläche 1.068 qucm. Strom in der K.-Flamme $i = 2252 \,.\, 10^{-6}$ Amp.

an der Anode $\sim \frac{5.7}{0.07}$ | Strom in der reinen Flamme $i_0 = 0.374 \,.\, 10^{-6}$ Amp.

II. Electrometerconstante $c = 0.4967$. $^1/_{10}$ *n* KCl. Kathode: weiß-glühend; Anode: dunkelrot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0
mm	0	0	0.3	0.5	0.7	0.8	1.5	6.3	11.3	16.3	17.8	18.3	18.8	19.0	19.1	0
Volt	+2.868	+2.8	+1.38	+0.89	+0.74	+0.94	+0.82	+0.83	0.0	—0.59	—0.43	—0.53	—0.53	—2.3	—2.9	—2.868

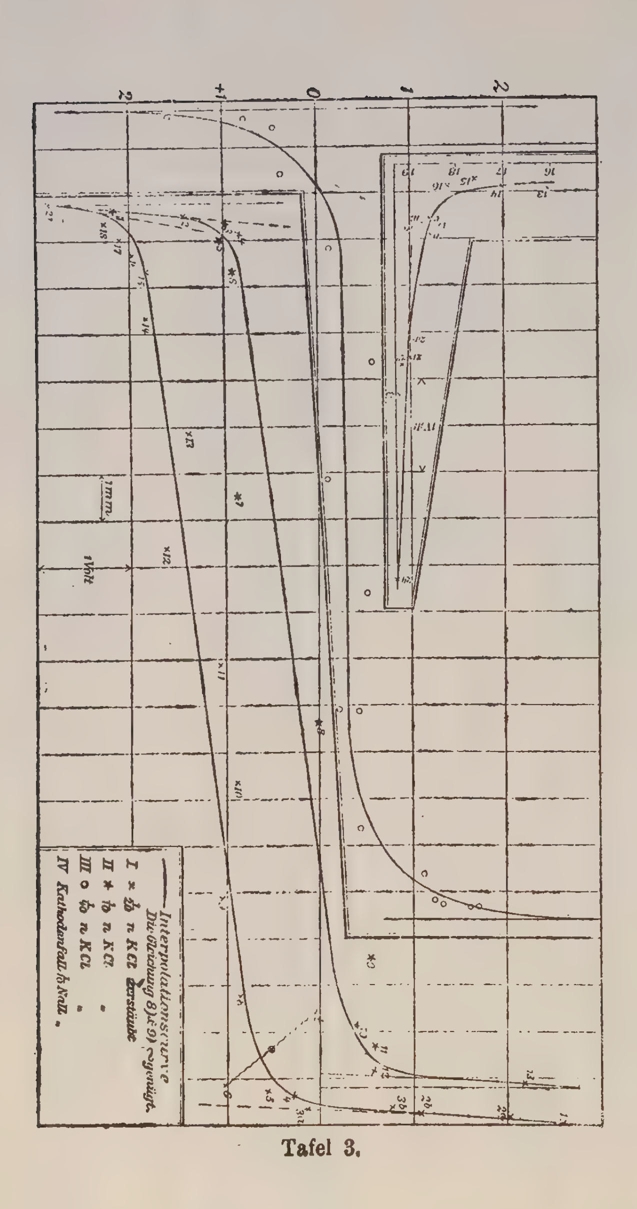
Potentialfall an der Kathode in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}} \sim \frac{4.66}{0.035}$ | Stromfläche 1.068 qucm. Strom in der K.-Flamme $i = 2.980 \,.\, 10^{-6}$ Amp.

„ an der Anode $\sim \frac{2.86}{0.06}$ | Strom in der reinen Flamme $i_0 = 0.466 \,.\, 10^{-6}$ Amp.

III. Electrometerconstante $c = 0.7504$. $^1/_{40}$ *n* KCl. Kathode: weiß-glühend; Anode: rot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0
mm	0	17.5	17.3	17.2	17.1	17.0	16.5	15.5	13.0	10.5	8.0	5.5	3.0	1.4	0.4	0.2	0	0
Volt	—2.87	—2.87	—17.2	—17.1	—1.32	4.24	1.12	0.425	0.42 0.22	0.52	0.12	0.57	0.14	0.38	0.485	0.79 1.56	2.87	2.87

Potentialfall an den Electroden kaum meßbar. Stromfläche 1.175 qucm. Strom in der K.-Flamme $i = 1.768 \,.\, 10^{-6}$ Amp.
Strom in der reinen Flamme $i_0 = 0.249 \,.\, 10^{-6}$ Amp.



Tafel 3.

7. Die Messungen sind in Tafel 3 eingetragen. Wir legen durch die Beobachtungen eine (theoretisch mögliche) Curve, derart, daß unter möglichster Anpassung an die Beobachtungen, die gleichzeitige Beziehung 8) und 9) annähernd erfüllt ist, und berechnen unter Eintragung der Daten aus der Tabelle, in 12) die Größe $\varkappa$. Wir dürfen diese Formel benutzen, da wir die Experimentalanordnung so getroffen haben, daß die von uns berechnete Grenze der Giltigkeit des Ohm'schen Gesetzes an jeder Stelle der Curve eingehalten ist. Den Potentialfall nehmen wir so an, wie er in der Tafel eingezeichnet ist. Alsdann wird etwa für I

$$\varkappa_2 = \frac{4\pi i \lambda_1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2_m} = \frac{4\pi . 1.878 . 10^{-6} . 0.08 . 300^2 . 3}{10^{-9} . 1.0686 . \left(\frac{3.2}{0.1}\right)^2} \left[\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{gr}^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Hieraus ergiebt sich

$$v \sim 1000 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec.}};$$

durch analoge Rechnung mit etwas mehr Sicherheit ergiebt sich

$$u \sim 260 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec.}}.$$

Das sind natürlich grobe Näherungen, deren Sicherheit vielleicht 50% betragen mag. Curve II ergiebt

$$v \sim 800 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec.}}, \quad u \sim 250 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec.}}.$$

Die Größe der Uebereinstimmung zwischen diesen Zahlen liegt außerhalb ihrer Sicherheit, namentlich bei u.

Was diese Messung sehr erschwert, ist die Schwierigkeit die Flammenstellung so zu reguliren, daß an keiner Electrode der Potentialfall zu groß wird. Ist die Anode zu heiß oder zu kalt, so treten nach Satz V resp. Gleichung 12) wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze für die positiven resp. negativen Jonen auf, indem im ersteren Falle das Kathodengefälle, im zweiten der Anodenfall die für unsere Berechnung zulässige Grenze übersteigt.

In Tafel 2 (IV) ist das Kathodengefälle folgender Messungsreihe eingetragen.

Electrometerconstante $c = 0.32045$. $^1/_{10}\, n$ NaCl. Kathode: weiß-glühend; Anode: hellrot.

Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	0
mm	0	0	0.1	0.2	0.6	1.1	2.1	5.8	6	6.9	8.1	11.1	13.6	16.1	17	17.6	18.1	18.6	18.7	18.8	18.9	19.0	19.1	19.2	19.3	19.3
Volt	2.87	2.8	2.54	2.54	2.31 2.33	2.32	1.79	1.63	1.48	(0.99)	1.31	1.40	1.31	1.39	1.40	1.48	1.40	0.92 1.06	1.00	+ 0.92	— 0.28	0.43	0.53	0.83	2.8	2.8

Potentialfall an der Kathode $\frac{2.87}{0.03} \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ Stromfläche 1.175 qucm. Strom in der K.-Flamme $i = 1.006 \cdot 10^{-6}$ Amp.
Strom in der reinen Flamme $i_0 = 0.51 \cdot 10^{-6}$ Amp.

Die Beobachtungsstörungen sind hier offenbar viel geringer als in den oben für HCl angeführten Messungen. Der Grund ist kein zufälliger, sondern liegt darin, daß die Anode wesentlich heißer gehalten war, als in obigen Reihen. Störungen im Gaszufluß kommen alsdann viel weniger zur Geltung. Der Potentialfall an der Kathode (Tafel III, IV) ist hier mit größerer Genauigkeit als oben meßbar; der an der Anode ist wenig sicher durch die Beobachtungen festgelegt.

8. Während so vieler Beobachtungen, wie hier, constante Bedingungen zu bewahren, ist sehr schwer. Nach einigen Stunden Erhitzens ändert sich der Potentialfall etwas: Wir glauben den Grund darin zu finden, daß die Temperatur der Anode bei gleicher Gashöhe wie beim Beginn des Experimentes in Folge schlechter werdender Wärmeleitung sich erhöht; Polarisation im gewöhnlichen Sinne halte ich nach meinen Beobachtungen für sehr unwahrscheinlich, und glaube, daß Erscheinungen die dahin gedeutet wurden, auf nicht stationäre Temperatur zurückzuführen sind. Weder Arrhenius, noch Giese, noch Smittels oder Wilson haben Polarisation analog der bei Flüssigkeitsketten beobachtet.

9. Berechnet man nach dem Diagramm und den angegebenen Daten $\varkappa_2$, so erhält man

$$\varkappa_2 = 36000$$

demnach

$$u = 120 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}.$$

Die Ausrechnung der ganzen Messung ist hier aus obigem Grunde wegen der Störungen am Schluß der Beobachtung nicht angängig.

Eine andere Messung für NaCl ergab

$$u \sim 300, \quad v \sim 1200.$$

Es bietet die Mitteilung weiteren Zahlenmaterials kein Interesse. Die Curven sind für Na, K und Li von absolut gleichem Character.

10. In Tafel I betrachteten wir die Abhängigkeit des Potentialfalles von der Temperatur der Anode, und benutzten Potentialdifferenzen von 75 Clark.

Curve II in Tafel I gestattet eine Ausmessung des λ und $\frac{d\varphi}{dx}$ mit einiger Genauigkeit. Wir zweifeln nicht daran, daß hier wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz in Folge des hohen

Potentialfalles vorliegen; eine Berechnung der u und v kann Auskunft geben, wie weit die Geschwindigkeitserhöhung durch nachlassende Reibung, gegen die normale Geschwindigkeit in Betracht kommt. Hier ist $i = 7.311 . 10^{-5}$, $i_0 \sim 0.1 . 10^{-5}$, die Stromfläche 1.068 qucm, der Potentialabfall $\frac{55}{0.07} \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$, $\lambda = 0.28$ cm. Also

$$\varkappa_2 = 102000$$

und

$$u' \sim 350 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$$

analog

$$v' \sim 1800 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}},$$

indem für $\lambda_2 = 0.08$ cm und der Potentialfall $\frac{29.5}{0.16} \frac{\text{Vol.}}{\text{cm}}$ gesetzt wurde.

Man sieht, daß die Geschwindigkeiten $u' v'$ wesentlich größer, als die u und v sind, welche nach Messungen berechnet wurden, die innerhalb dem, für das Ohm'sche Gesetz als gültig berechneten Potentialfall liegen.

Aber bemerkenswert ist, daß, obwohl der Strom hier 70 Mal, der Potentialfall 12 Mal größer als bei obiger Messung von Na Cl gewesen ist, die Geschwindigkeit im Potentialfall 1 nur etwa um das $1^1/_2$ fache gewachsen ist. Daß dies so sein würde vermuteten wir oben aus anderen Gründen (S. 47).

11. Die hier berechnete Größenordnung, stimmt für das negative Jon mit den Werten von H. Wilson überein. Herr Wilson findet etwa $1000 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$. Dagegen beträgt nach ihm $\frac{u}{v} \sim \frac{1}{17}$, während wir nirgends mehr als $^1/_5$ fanden.

Wir halten für möglich, daß bei uns die Temperatur der Anode schon zu tief war, so daß die positiven Jonen beschleunigt sind; aber wenn wir bedenken, daß bei unseren Zahlen zu der Geschwindigkeit des positiven Jons, die des Gasstromes hinzukommt, beim negativen abzuziehen ist, so erscheint uns, trotz der groben Näherung, die unsere Messungen gestatten, der von Herrn Wilson[1]) für das positive Jon erhaltene Wert von $60 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$ als möglicher Weise um das 2 bis 3 fache zu klein. Wir gehen auf die

1) cf. H. A. Wilson, l c.

Frage, ob die Annahme, die der Messung von Herrn Wilson zu Grunde liegt, daß die Geschwindigkeit des unverbrannten Gases dieselbe ist, wie die des erhitzten, berechtigt ist um so weniger ein, als sich diese leicht experimentell prüfen lassen wird. 2 Unterbrechungsstellen, ein Relais von der Empfindlichkeit 10^{-6} Amp. dürfte für die directe Geschwindigkeitsmessung der Flammengase (bei Anwendung von Netzen über und unter der Unterbrechungsstelle, vielleicht auch für die der Jonen im Poteutialfall 1) mittelst Rolle und Stimmgabel genügen, da mit dem Zerstäuber eine plötzliche Aenderung in der Leitung des Gases herbeizuführen ist.

Unzweifelhaft ergiebt sich aus allen diesen Geschwindigkeitsmessungen, daß die Größenordnung der Wanderungsgeschwindigkeit der Jonen in Flammengasen etwa 10^6 Mal größer als in Electrolyten ist, und die Differenz $u-v$ noch sehr viel größer.

Neben des principiellen Interesses für das Verständnis der Flammenelectricität, interessirte es uns wegen des Problems der Flammenleitung im Magnetfelde, auf das wir demnächst näher zurückkommen, die Größenordnung der von anderer Seite bestimmten Wanderungsgeschwindigkeiten aus dem Potentialverlauf nachzuprüfen.

§ 8. Die electrolytische Dissociation in der Flamme.

1. S. Arrhenius hat gezeigt, daß die Jonen, die den Transport der Electricität in Flammengasen übernehmen, gleichartig den der Electrolyse sind. Dieses Resultat kann verwundern. Die Anziehungskräfte, welche das Jonenpaar zusammenhalten, werden hier nicht durch die veränderte Dielectricitätsconstante gelockert; sie sind etwa 80 Mal so groß als in wäßriger Lösung. Aus der Reihe der aus dem Cawendich-Laboratory hervorgegangenen Arbeiten geht hervor, daß bei Gasen von niederer Temperatur der Electricitätstransport nicht durch electrolytisch dissociirte Molekel erfolgt.

Versuche von Herrn Euler[1]) zeigen, daß schon bei Lösungsmitteln von nur 3 Mal geringerer Dielectricitätsconstante, als die des Wassers, der Dissociationsgrad um etwa $^2/_3$ abnimmt. Es liegt nahe die hier vorhandene electrolytische Dissociation als durch besondere physicalische Ursachen hervorgerufen anzusehen.

2. Angeregt durch eine Bemerkung von Helmholtz im 5. Bande[2]) der Vorlesungen untersuchte ich den Einfluß kurzwelliger

1) H. Euler, Zeitschrift f. phys. Chemie 28. 1899.

2) H. v. Helmholtz, Vorlesungen herausg. v. König u. Runge, Bd. V p. 342.

Strahlung auf die Dissociation in der Flamme. Helmholtz bemerkt: „Die starke Absorption tritt also da ein, wo die Periode „des Lichtes mit der eigenen Schwingungsdauer der Molekeln „übereinstimmt. Die starke Absorption ist also von starkem Mit„schwingen der Molekeln begleitet, so daß wir dabei auch Wärme„entwicklung, und unter Umständen ein Zerreißen der Jonen„verbindungen erwarten können, namentlich wenn noch „eine electrostatische Ladung der Substanz hinzukommt. „So sind wohl die Beobachtungen von Hertz zu erklären über die „Entweichung der Electricität unter dem Einfluß ultravioletter „Strahlung."

3. Die Figur 6 zeigt die einfache Anordnung, die ich in Kiel im April vorigen Jahres verwandte.

Eine Quarzlinse Q wurde mir freundlichst von meinem Chef, Herrn Prof. Lenard, zur Verfügung gestellt. Das Paraboloid P ließ ich mir zu diesem Zwecke pressen; es ist so durchbohrt, daß die Zn Spitzen im Brennpunkte zusammenstoßen. Als Electricitätsquelle dient ein kleines Inductorium von 2.5 cm Funkenstrecke. Zur Vergrößerung der überspringenden Electricitätsmengen sind Capacitäten L angebracht. Die Stärke des aus dem Parabol austretenden Lichtes beträgt etwa 16 Hefner Lampen. G ist eine Glasplatte, die vom Fernrohr aus in den Lichtkegel, und aus diesem bewegt wird. An dem oben erwähnten Nervenmultiplicator konnte Nachts ein Strom von $8 . 10^{-8}$ Amp. mit Sicherheit beobachtet werden.

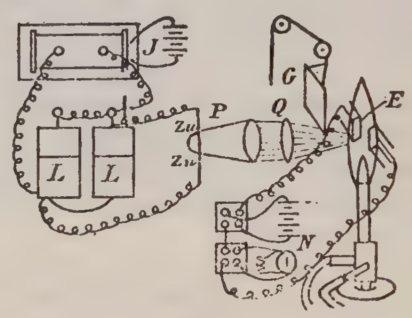


Fig. 6.

Nun betrug die Stromstärke im Galvanometerkreis $1.6 . 10^{-5}$ Amp. (200 Skalenteile (comm.); bei Kalium wurde Widerstand zugeschaltet), und wurde weder bei K noch bei Na um $^1/_2$ %, das wir sicher hätten nachweisen können, vermehrt.

Die Itensität des ultravioletten Lichtes, das von gelbglühenden Electroden ausgeht ist, wohl sicher nicht wesentlich größer als der Teil der Strahlung unserer Lichtquelle der zwischen die Electroden kam. Eine Steigerung der Temperatur der Electroden von Rotglut auf Gelbglut vermehrt aber den Strom um etwa 2000 %.

Eine Bestrahlung mit intensiven Röntgenstrahlen, die wir hier versuchten, führte zu demselben

negativen Ergebnis. Folglich erscheint der Schluß berechtigt, daß nicht kurzwellige Strahlung die electrolytische Dissociation in der Flamme verursacht.

4. Die Versuche von Wiedemann und Ebert[1]) zeigen, daß bei relativ kalten Electroden, unabhängig von ihrem Material, die Leitung der Flamme sehr gering ist; weiter ist selbstverständlich, daß die an heißen Electroden stärker erfolgende Molecularbewegung, die Jonen nicht trennen kann; die Flamme ist stets heißer als die Electroden. Es scheint demnach die einzig plausible Erklärung, um nicht mit dem Coulomb'schen Gesetz in Widerspruch zu geraten, doch in der citirten Bemerkung von Helmholtz, also in electrodynamischer Einwirkung zu beruhen.

Nun geht aus der Untersuchung von Arrhenius[2]) hervor, daß die electrolytische Dissociation in der Flamme stets in Hydrolyse besteht, d. h. nach der Gleichung

$$\mathrm{K\,Cl + H\,OH = H\,Cl + \overset{+}{K} + \overset{-}{O}H}$$

erfolgt; hier tritt also das OH-Jon in Reaction. Aus spektralanalytischen Untersuchungen geht hervor, daß dem OH-Jon ganz hervorragende electromagnetische Resonanzerscheinungen namentlich für langwellige Strahlung zukommen, die im Ultraroten ihr Maximum[3]) besitzen, und bis ins electrische Gebiet hineinzureichen scheinen[4]).

Wir kommen deshalb auf Grund der Helmholtz'schen Bemerkung in Verbindung mit der Thatsache, daß der Dissociationsgrad eine Function der Temperatur des Electroden ist, und des negativen Ausfalles des Experimentes der Bestrahlung mit ultraviolettem Licht, sowie der Existenz starker Resonanz des OH-Jons im Ultraroten dazu, daß, um den scheinbaren Widerspruch der dissociirenden Kraft der Flamme mit dem Coulomb'schen Gesetze zu umgehen, es eine plausible Annahme ist, anzunehmen, daß die electrolytische Dissociation in der Flamme, auf der electromagnetischen Resonanz des OH-Jons auf ultraroter Strahlung beruht.

Also: In dem gewissermaßen zufälligen Vorhandensein des OH-Jon und seiner electromagnetischen Eigenschaften, nicht in der

---

1) Wiedemann und Ebert, Wied. Ann. Bd. 35. 255. (1888).

2) Arrhenius l. c.

3) Paschen, Wied. Ann. 53. p. 334 1894; E. Aschkinass, Wied. Ann. 55. 1895.

4) E. Marx, Wied. Ann. Bd. 66 1898; Dissert. Göttingen 1898.

dissociirenden Kraft der Flamme, scheint uns der Grund zu liegen, daß der Strom in Flammengasen von polaren Molekeln, nicht an und für sich neutralen, wie in anderen Gasen, getragen wird.

§ 9. Demonstration des Auftretens einseitiger Beschleunigungen der Jonen in Flammengasen.

Ueber die Untersuchung der Flammenleitung im Magnetfelde, für welche, wie ersichtlich die Experimentalanordnung eingerichtet ist, haben wir hier nicht zu berichten. Das Experiment aber, das nach § 2 die Ursache zu vorliegender Untersuchung bildete, liefert den experimentellen Beweis unseres, aus dem Potentialfall theoretisch deducirten Schlusses, des Auftretens einseitiger Geschwindigkeitsänderungen im Potentialfall 1 bei geringer electromotorischer Kraft. Deshalb führen wir es hier an.

Bringen wir die Flamme in ein Magnetfeld und bringen 2 „secundäre Electroden“ an, so kann man qualitativ leicht den Hall-Effect nachweisen. Die Theorie[1]) lehrt, daß der Effect sowohl der Differenz der Wanderungsgeschwindigkeiten, als dem Potentialfall an der Stelle der Hallelectroden direct proportional ist; er ist ceteris paribus etwa um das 10^6 fache größer zu erwarten, als bei Electrolyten, bei denen man ihn seit lange vergeblich nachzuweisen sucht.

Bei Flammengasen liegt neben manchem experimentellem die Schwierigkeit in folgendem: Haben wir 2 gleichtemperirte Primär-Electroden, so wird der Potentialfall zwischen diesen nahe gleich 0 (Tafel 1). Dies mußten wir verhüten; deshalb benutzten wir nach Satz IV resp. Gleichung 12) die geringere Temperatur der Anode als Depolarisationsmittel, indem durch Verringerung der freien positiven Electricität an der Kathode, das Anodengefälle und der Potentialfall zwischen den Electroden wuchs.

Hier aber trat folgendes ein: Die „Drehung“ die sich negativ nach der Theorie ergiebt, ergab sich nach dem Experiment nicht nur nicht in dem erwarteten absoluten Betrage, sondern sogar positiv, blieb plötzlich aus, und wurde am Ende des Experimentes negativ. Der Potentialfall nahe den Secundär-Electroden war unverändert geblieben. Also, am Anfang des Experimentes war die Anode zu kalt gehalten, so daß nach Gleichung 11) die Gasreibung nicht mehr ausreichte, und die positiven Jonen schneller als die negativen wanderten. Während der langen Dauer der Messung hatte

---

1) cf. z. B. E. Riecke, Theorie des Galvanismus und der Wärme, Göttinger Ber. 1898, Heft 1 pag. 17 oder Wied. Ann. 98 Bd. 66, pag. 563.

sich dann die Anode so weit erwärmt, daß $u-v$ wieder negativ wurde. Erst die Erkenntnis, daß hier Beschleunigungen auftraten und nachließen, giebt die Erklärung; Polarisation hätte nur das Gefälle ändern, nicht die „Drehung" umkehren können.

§ 10. **Zusammenfassung und Resultate.**

Die Abweichung vom Ohm'schen Gesetz, die bei geringen electromotorischen Kräften in Flammengasen auftritt, ist bereits lange bekannt. Sie wurde bisher stets als allein durch das Einsetzen des Sättigungsstromes veranlaßt, also nicht die Grundannahme des Gesetzes, die Proportionalität zwischen Kraft und Geschwindigkeit, verletzend, angesehen [§ 6]. Durch das Studium der Flammenleitung im Magnetfelde wurden wir darauf aufmerksam [§ 2 und 9], daß neben dieser scheinbaren Abweichung wahre Abweichungen schon bei geringen electromotorischen Kräften einsetzen.

Die theoretischen Schwierigkeiten, welche sofort mit dem Einsetzen von Beschleunigungen beginnen, suchten wir zu umgehen, indem wir nach einem Falle suchten, welcher die Grenze zwischen wahrer und scheinbarer Abweichung zu erkennen gestattete. Wir fanden diesen, in der Abhängigkeit des Potentialfalles in Flammengasen von der Temperatur der Anode [§ 4]. Die theoretische Behandlung, fußend auf Schuster's und namentlich J. J. Thomsons Convections-Theorie ergab aus diesem einen Beispiel die in folgenden Sätzen zusammengefaßten Resultate.

I. Die Jonenconcentration der Flamme ist eine Function der Temperatur der Electroden und nimmt mit sinkender Temperatur ab.

II. Sinkt die Temperatur der Anode unter eine gewisse Grenze, so erleidet das positive Jon Beschleunigungen, die so groß werden, daß die unter annähernd gleichem Potentialfall zurückgelegten Strecken annähernd gleich werden. Bei noch tiefer werdender Temperatur, dreht sich das Verhältnis der Strecken um.

Hierdurch war die (§ 9) vermutete Existenz einseitig auftretender Beschleunigungen erwiesen, und wir versuchten aus kinetischen Vorstellungen die Grenzen des Einsetzens zu bestimmen. Hierbei sind 2 unabhängige Variable, welche die Be-

schleunigungen herbeiführen, zu unterscheiden; Kraft und Temperatur. Wir bestimmten die Kraft bei constanter Temperatur und kamen [§ 6 B] zu dem nunmehr unabhängig von der Temperatur giltigen Resultat.

III. Bei gleich temperirten Electroden sind schon bei Potentialdifferenzen von 2 Volt Beschleunigungen der negativen Jonen zu erwarten.

Nach diesem Excurs kehrten wir zu dem gewählten Beispiele zurück. Die Integration der Poisson'schen Gleichung lieferte aus dem Potentialverlauf die Größe der freien Electricität an den Electroden in absolutem Maaß. Sofort war ersichtlich

IV. Die Größe der freien positiven Electricität an der Kathode nimmt ab, wenn die Temperatur der Anode sinkt. Gleichzeitig nimmt die freie negative Electricität an der Anode zu.

Wir zeigten, daß aus Satz I und IV notwendig folgt

V. Der Dissociationsgrad der Flamme für die positive resp. negative Jonenart ist wesentlich bedingt durch die Temperatur der betreffenden Electrode. Eine von Herrn Wilson zuerst vertretene Hypothese.

Satz V lieferte uns eine äußerst empfindliche Methode, die Isothermen in der Flamme zu bestimmen. Aus V folgte streng

VI. In der Flamme liegen die Stellen fehlender unipolarer Leitung auf Isothermen.

Nachdem wir diese Sätze aus der Discussion des gewählten Falles erhalten hatten, benutzten wir sie dazu die Experimentalanordnung so zu treffen, daß wir wahre Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze vermieden, und bestimmten aus dem Potentialfall die Größenordnung der Wanderungsgeschwindigkeiten [§ 7], der den Electricitätstransport übernehmenden Jonen.

§ 8 enthält einen Excurs über die Ursache der electrolytischen Dissociation. Die von Arrhenius erwiesene Thatsache, daß die Dissociation in der Flamme electrolytisch ist, steht in scheinbarem Widerspruch mit dem Coulomb'schen Gesetz und erfordert eine plausible Erklärung.

Anknüpfend an eine Bemerkung in Helmholtz' Vorlesungen erschien uns der Umstand, daß die electrolytische Dissociation stets in Hydrolyse besteht, geeignet eine solche darin zu suchen, daß die electrolytische Dissociation der Flamme durch die electromagnetische Resonanz des OH-Jons auf

ultrarote Strahlung bedingt ist, demnach dem gewissermaßen zufälligen Vorhandensein des OH - Jons und seines electromagnetischen Eigentones, nicht der dissociirenden Kraft der Flamme sein Entstehen verdankt.

Auf negative Resultate einen Einfluß des ultravioletten Lichtes oder der Röntgenstrahlen auf die Dissociation zu finden, wurde hingewiesen.

Zum Schluß (§ 9) diente uns das Experiment, welches uns zu dieser Untersuchung des Auftretens einseitiger Beschleunigungen der Jonen in Flammengasen veranlaßt hatte, die Umkehr der electromagnetischen „Drehung“ im Magnetfelde, dazu das Auftreten und Nachlassen von Beschleunigungen der positiven Jonen bei wachsender Temperatur der Anode direct zu demonstriren.

In § 3 beschrieben wir unsere Apparate.

Begonnen wurden diese Untersuchungen im Physic. Institut in Kiel, wo ich als Assistent angestellt war. In den Ferien 1898 fortgesetzt in Stockholms Hochschule. Herrn Professor S. Arrhenius, der mir mit größter Liebenswürdigkeit und Liberalität die notwendigen Apparate zur Verfügung stellte, habe ich ganz besonders zu danken, daß er mir Platz und Mittel für diese Untersuchungen weit über die erbetene Zeit überlassen hat.

Stockholm, 5. Februar 1900.

Zur Frage nach der Hydratation gelöster Substanzen. I.

Von

W. Nernst.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1900.

Ob bei der Auflösung eine Verbindung zwischen dem Lösungsmittel und der gelösten Substanz stattfindet, ist bekanntlich eine offene Frage; die Methoden der Molekulargewichtsbestimmung versagen, wenn es sich um die Ermittelung z. B. der Wassermengen handelt, die eine in Wasser gelöste Substanz zu binden vermag.

Die Spekulationen über diesen Gegenstand haben entsprechend ganz verschiedene Wege eingeschlagen; während die gewöhnliche Lösungstheorie von einer Hydratation absieht, nehmen einzelne Forscher [1]) eine bisweilen sehr weitgehende Bindung des Wassers seitens der gelösten Substanz an.

Nun ist klar, daß in sehr verdünnten Lösungen der Einfluß etwaiger Hydratation auf die bisher theoretisch behandelten Erscheinungen immer mehr mit der Verdünnung zurücktritt, und daß daher die neuere Lösungstheorie, deren Gesetze sich ja vorwiegend auf sehr verdünnte Lösungen erstrecken, vollkommen berechtigt war, bei der Behandlung der elektrischen Leitfähigkeit, der Diffusion, der elektromotorischen Wirksamkeit etc. von einer etwaigen Hydratation abzusehn. Dabei blieb nun aber, wie wiederholt betont, [2]) das Problem durchaus bestehn, einen Einblick in den Hydratationszustand gelöster Substanzen zu erhalten.

---

1) Vgl. z. B. Mendelejeff, Zeitschr. physik. Chem. 1 273 (1887); Pickering, ibid. 6 10 (1890).

2) Vgl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie II. Aufl. S. 430.

Während, wie schon bemerkt, Untersuchungen des osmotischen Drucks oder überhaupt des Gleichgewichts in Lösungen keinen Aufschluß zu gewähren scheinen, liegt die Sache offenbar günstiger, wenn man dynamische Erscheinungen betrachtet. Wenn nämlich der gelöste Stoff im Lösungsmittel sich verschiebt, so wird gleichzeitig das Wasser, das er gebunden enthält, an der Wanderung theilnehmen und es fragt sich nur, ob diese Wanderung der experimentellen Untersuchung zugänglich gemacht werden kann. Dies ermöglicht sich nun offenbar in der Weise, daß man dem Wasser eine dritte Substanz zusetzt; wird durch eine Bewegung des gelösten Stoffes gleichzeitig Wasser mitgeführt, so muß sich das Verhältnis des Wassers zu der gleichsam als Indikator zugesetzten dritten Substanz ändern.

Eine Wanderung des gelösten Stoffes läßt sich nun durch Diffusion und durch Elektrolyse besonders leicht erzielen; wir sehen also, daß Untersuchungen über Diffusion und Jonenwanderung die Hydratation zu ermitteln gestatten, wenn eine dritte Substanz dem Lösungsmittel zugesetzt wird. Selbstverständlich darf diese hinzugesetzte Substanz keine Bindung mit der wandernden Substanz eingehen; hierüber aber geben ja die gewöhnlichen Methoden der Molekulargewichtbestimmung leicht Aufschluß.

Bei der Untersuchung binärer völlig dissociirter Elektrolyte liefert die Diffusionsmethode die Summe, die Ueberführungsmethode die Differenz der von den beiden Ionen mitgeführten Wassermengen; hier ergänzen sich also die beiden Methoden.

Die folgenden beiden Abhandlungen sind von dem dargelegten Gesichtspunkte aus entstanden; es sei schon hier das hauptsächlichste Resultat angegeben, daß nämlich die Hydratation gelöster Stoffe im Allgemeinen entweder fehlt oder jedenfalls nur sehr geringfügig sein kann.

Zur Frage nach der Hydratation gelöster Substanzen. II.

Von

H. Lotmar.

Mit einer Textfigur.

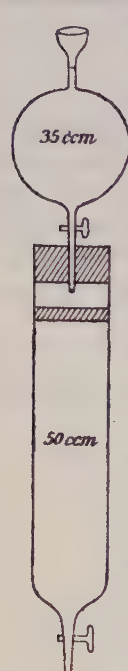
Vorgelegt von Herrn W. Nernst in der Sitzung am 3. März 1900.

Diffundirt ein gelöster Körper, so wird er, wenn er hydratisirt ist, vom Ausgangspunkte der Diffusion Lösungsmittel fortführen an die Stellen, an die er sich hinbewegt. Dieses Wandern des Lösungsmittels kann kenntlich gemacht werden durch Auflösung eines zweiten Stoffes, eines Indicators, in der Flüssigkeit, der sich vor dem Versuche überall in gleicher Concentration vorfindet; nach dem Versuche werden durch die Wanderung des an den ersten Körper gebundenen Lösungsmittels Concentrationsunterschiede des Indicators bewirkt sein, aus denen in einfacher Weise die Menge des an ein Molekül wandernden Stoffes gebundenen Lösungsmittels berechnet wird. Nun ist zu erinnern, daß nach den Anschauungen von Stefan die Diffusion in nicht sehr verdünnten Lösungen ein zusammengesetzter Vorgang ist [1]), das heißt, der Ausgleich der Concentrationsunterschiede wird vom gelösten Stoffe in der einen Richtung, vom Lösungsmittel in der entgegengesetzten Richtung besorgt. Diese Erscheinung wird in entgegengesetzter Richtung wie das Hydratationsphaenomen wirken; sie wird ein Zuwandern des Lösungsmittels an den Orten veranlassen, wo dieses ein Wegwandern desselben hervorruft.

Da es sich bei den zu beschreibenden Versuchen nur um Feststellung des Verhältnisses wandernden gelösten Stoffes und

1) worauf mich in freundlicher Weise Herr Geheimrat Tollens zuerst aufmerksam machte. — vgl. Monatshefte f. Chemie X, p. 207/208 (1889).

wandernden Lösungsmittels handelte, konnte von der Anwendung des von Scheffer und dann von den meisten Experimentalosen im Diffusionsgebiete mit geringen Abänderungen benutzten Apparates[1]), der immerhin complizirt ist, abgesehen werden. In ein cylindrisches, unten verjüngtes und mit Glashahn versehenes Glasrohr von ca. 50 ccm Inhalt wurden 10 ccm der schwereren Lösung gebracht, hierauf eine Korkscheibe gelegt und schließlich aus einer aufgesetzten, mit Glashahn versehenen Pipette, das Lösungsmittel (ca. 35 ccm) tropfenweise darüber geschichtet. Unter „Lösungsmittel" ist natürlich die Auflösung des Indicators in Wasser zu verstehen, welches diesen in gleicher Concentration wie die „Lösung" enthält, (welche außerdem den diffundirenden Körper enthält). Es bildet sich eine scharfe Trennungsfläche der Flüssigkeiten. Auf die Anwendung gut eingeschliffener Glashähne ist Gewicht zu legen, da hierdurch die bei der Handhabung des Apparates erfolgende Erschütterung auf das kleinste Maaß reducirt wird. Schließlich ist Verpackung der Apparate in Watte und Aufstellung in einem Raum möglichst constanter Temperatur zu erwähnen.



Was die Bestimmung der Zusammensetzung der Lösung vor und nach dem Versuch betrifft so empfehlen sich, da eine Anzahl gleichartiger Analysen vorzunehmen sind, besonders titrimetrische Methoden. Was den diffundirenden Körper anbelangt — in den folgenden Versuchen Buttersäure, Essigsäure, Borsäure, Silbernitrat — so ist die Genauigkeit der Titration dieser Stoffe mit $^1/_{10}$ Normalkali (Phenolphtaleïn als Indicator) resp. $^1/_{10}$-Normalrhodanammonlösung eine vollständig genügende; ja selbst die Versuche mit zweifachnormaler Essigsäure, bei denen wegen Anwendung stärkerer Kalilauge zur Neutralisation und Gegenwart von Silbernitrat der Farbenumschlag undeutlicher, die Versuchsfehler bedeutender sind, sind brauchbar, da die Rechnung zeigt, daß selbst ein größerer Fehler bei dieser Bestimmung als der gemachte auf das Schlußresultat nicht von Einfluß ist. Am wichtigsten für das Resultat ist die bei der Concentrationsbestimmung des Indicators erzielte Genauigkeit; wird Silbernitrat als solcher angewandt, so leistet die exakte Volhard'sche Titrationsmethode hierin Genügendes. Immerhin ist zu bemerken, daß die Genauigkeit der Versuche, in

1) Zeitschr. f. physikal. Chemie II, 390 (1888).

denen Silbernitrat 0,15 normal mit 1/40 normal Rhodanammon titrirt wurde eine geringere ist als diejenige der Versuche, in denen die Bestimmung von Silbernitrat 0,5 normal mit 1/10 normal Rhodanammon durchgeführt wurde. Bei den Diffusionsversuchen mit Silbernitrat fungirte Propionsäure als Indicator. Die Bestimmung der Borsäure geschah — nach einer Methode von Vadam[1]) — nach Zusatz von Mannitlösung durch Titration der entstehenden einbasischen Mannitborsäure mit Natronlauge. Schließlich war zu untersuchen, ob die Gegenwart größerer oder geringerer Säuremengen (Essigsäure, Buttersäure u. s. w.) auf den Eintritt des Farbenumschlags der Volhard'schen Methode von Einfluß ist; der Versuch entschied, wie zu erwarten, daß ein solcher Einfluß nicht merkbar ist. Die folgenden Ergebnisse wurden erhalten:

Borsäure, ca. 1/2 normal.

Zusammensetzung der Lösung.

Auf 0.1000 gr. Silbernitrat kommen:

	Borsäure	Wasser
1.	0.1201 gr	4.127
2.	0.1205	4.139
3.	0.1196	4.140
4.	0.1191	4.131
Mittel:	0.1198 gr	4.134 gr

auf 1000 gr Wasser { 0.4674 gr — Moleküle Borsäure.
0.1421 gr — Moleküle Silbernitrat.

Versuch 1.

Analysirte Menge: 6.3793 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1474 gr	Silbernitrat	0.1474 gr
0.1770 gr	Borsäure	0.0962 gr
6.170 gr	Wasser	6.136 gr

weggewanderte Borsäure: 0.0808 gr

weggewandertes Wasser: — 0.029 gr

Mit 1 Molekül Borsäure wandern — 1,2 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0548 gr Borsäure.

Dauer der Diffusion: 6 Tage.

Temperatur: 12,8° bis 14,1°.

1) J. Pharm. Chim. [6] 8, 109—111. 1/8; ref. Chem. Centralbl. 1898, II, 678.

Versuch 2.

Analysirte Menge: 7.0970 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1650 gr	Silbernitrat	0.1650 gr
0.1977 gr	Borsäure	0.1083 gr
6.821 gr	Wasser	6.824 gr

weggewanderte Borsäure: 0.0894 gr

weggewandertes Wasser: — 0.003 gr

Mit 1 Molekül Borsäure wandern 0 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0542 gr Borsäure.

Dauer der Diffusion: 6 Tage.

Temperatur: 12,8° bis 14,1°.

Versuch 3.

Analysirte Menge: 7.6232 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1770 gr	Silbernitrat	0.1770 gr
0.2121 gr	Borsäure	0.1417 gr
7.318 gr	Wasser	7.305 gr

weggewanderte Borsäure: 0.0704 gr

weggewandertes Wasser: 0.013 gr

Mit 1 Molekül Borsäure wandern 0.6 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0397 gr Borsäure.

Dauer der Diffusion: 5 Tage.

Temperatur: 12,8° bis 15,1°.

Versuch 4.

Analysirte Menge: 7.6035 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1768 gr	Silbernitrat	0.1768 gr
0.2118 gr	Borsäure	0.1377 gr
7.309 gr	Wasser	7.289 gr

weggewanderte Borsäure: 0.0741 gr

weggewandertes Wasser: 0.020 gr.

Mit 1 Molekül Borsäure wandern 0.9 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0419 gr Borsäure.

Dauer der Diffusion: 5 Tage.

Temperatur: 12,8° bis 15,1°.

Versuch 5.

Analysirte Menge: 8.7393 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2026 gr	Silbernitrat	0.2026 gr
0.2427 gr	Borsäure	0.1276 gr
8.375 gr	Wasser	8.409 gr

weggewanderte Borsäure: 0.1151 gr
weggewandertes Wasser: — 0.034 gr.
Mit 1 Molekül Borsäure wandern — 1,0 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0568 gr Borsäure.

Dauer der Diffusion: 9 Tage.
Temperatur: 12,8° bis 15,1°.

Versuch 6.

Analysirte Menge: 8.3686 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1938 gr	Silbernitrat	0.1938 gr
0.2322 gr	Borsäure	0.1149 gr
8.013 gr	Wasser	8.060 gr

weggewanderte Borsäure: 0.1173 gr
weggewandertes Wasser: — 0.053 gr.
Mit 1 Molekül Borsäure wandern — 2,1 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0605 gr Borsäure.

Dauer der Diffusion: 9 Tage.
Temperatur: 12,8° bis 15,1°.

Silbernitrat, ca. 1/2 normal.

Zusammensetzung der Lösung.

Auf 0.1000 gr Propionsäure kommen:

	Silbernitrat	Wasser
1.	0.2651 gr	3.096 gr
2.	0.2650	3.083
3.	0.2651	3.094
4.	0.2656	3.096
5.	0.2654	3.097
Mittel:	0.2652 gr	3.093 gr

auf 1000 gr Wasser kommen { 0.5044 gr Moleküle Silbernitrat.
0.4369 gr Moleküle Propionsäure. }

Versuch 1.

Analysirte Menge: 7.2117 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2121 gr	Propionsäure	0.2121 gr
0.5626 gr	Silbernitrat	0.3067 gr
6.561 gr	Wasser	6.693 gr

weggewandertes Silbernitrat: 0.2559 gr

weggewandertes Wasser: — 0.132 gr.

Mit 1 Molekül Silbernitrat wandern — 4,9 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Propionsäure bezogen sind gewandert 0.1206 gr Silbernitrat.

Dauer der Diffusion: 6 Tage.

Temperatur: 13,8° bis 14,5°.

Versuch 2.

Analysirte Menge: 7,0955 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2083 gr	Propionsäure	0.2083 gr
0.5525 gr	Silbernitrat	0.3041 gr
6.444 gr	Wasser	6.583 gr

weggewandertes Silbernitrat: 0.2484 gr

weggewandertes Wasser: — 0.139 gr.

Mit 1 Molekül Silbernitrat wandern — 5,3 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Propionsäure bezogen sind gewandert 0.1192 gr Silbernitrat.

Dauer der Diffusion: 6 Tage.

Temperatur: 13,8° bis 14,5°.

Versuch 3.

Analysirte Menge: 6.0182 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1760 gr	Propionsäure	0.1760 gr
0.4668 gr	Silbernitrat	0.2409 gr
5.445 gr	Wasser	5.601 gr

weggewandertes Silbernitrat: 0.2259 gr

weggewandertes Wasser: — 0.156 gr.

Mit 1 Molekül Silbernitrat wandern — 6,5 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Propionsäure bezogen sind gewandert 0.1284 gr Silbernitrat.

Dauer der Diffusion: 8¾ Tage.

Temperatur: 13,3° bis 14,5°.

Versuch 4.

Analysirte Menge: 7.8674 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2321 gr	Propionsäure	0.2321 gr
0.6154 gr	Silbernitrat	0.3135 gr
7.178 gr	Wasser	7.322 gr

weggewandertes Silbernitrat: 0.3019 gr

weggewandertes Wasser: —0.144 gr.

Mit 1 Molekül Silbernitrat wandern — 4,5 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Propionsäure bezogen sind gewandert 0.1301 gr Silbernitrat.

Dauer der Diffusion: 8¾ Tage.

Temperatur; 13,3° bis 14,5°.

Versuch 5.

Analysirte Menge: 8.343 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2468 gr	Propionsäure	0.2468 gr
0.6546 gr	Silbernitrat	0.2990 gr
7.635 gr	Wasser	7.797 gr

weggewandertes Silbernitrat: 0.3556 gr

weggewandertes Wasser: —0.162 gr.

Mit 1 Molekül Silbernitrat wandern — 4,3 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr. Propionsäure bezogen sind gewandert 0.1441 gr Silbernitrat.

Dauer der Diffusion: 11¾ Tage.

Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Versuch 6.

Analysirte Menge: 8.5426 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2548 gr	Propionsäure	0.2548 gr
0.7386 gr	Silbernitrat	0.2785 gr
7.880 gr	Wasser	8.009 gr

weggewandertes Silbernitrat: 0.4601 gr

weggewandertes Wasser: —0.129 gr.

Mit 1 Molekül Silbernitrat wandern —2,6 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Propionsäure bezogen sind gewandert 0.1806 gr Silbernitrat.

Dauer der Diffusion: 11¾ Tage.

Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Buttersäure, ca. 1/2 normal.

Zusammensetzung der Lösung.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat kommen:

	Buttersäure	Wasser
1.	0.2350 gr	3.998 gr
2.	0.2331	3.980
3.	0.2316	3.951
4.	0.2326	3.956
5.	0.2332	3.980
Mittel:	0.2331 gr	3.973 gr

auf 1000 gr Wasser kommen { 0.6724 gr Moleküle Buttersäure. 0.1481 gr Moleküle Silbernitrat.

Versuch 1.

Analysirte Menge: 7.2334 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1724 gr	Silbernitrat	0.1724 gr
0.4019 gr	Buttersäure	0.1922 gr
6.851 gr	Wasser	6.869 gr

weggewanderte Buttersäure: 0.2097 gr

weggewandertes Wasser: —0.018 gr.

Mit 1 Molekül Buttersäure wandern —0,4 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.1216 gr Buttersäure.

Dauer der Diffusion: 11 Tage.

Temperatur: 12,1° bis 14,15°.

Versuch 2.

Analysirte Menge: 7.7958 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1858 gr	Silbernitrat	0.1858 gr
0.4331 gr	Buttersäure	0.2191 gr
7.380 gr	Wasser	7.391 gr

weggewanderte Buttersäure: 0.2140 gr

weggewandertes Wasser: —0.011 gr.

Mit 1 Molekül Buttersäure wandern —0,3 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.1152 gr Buttersäure.

Dauer der Diffusion: 11 Tage.

Temperatur: 12,1° bis 14,15°.

Versuch 3.

Analysirte Menge: 8.0862 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1932 gr	Silbernitrat	0.1932 gr
0.4504 gr	Buttersäure	0.2065 gr
7.675 gr	Wasser	7.687 gr

weggewanderte Buttersäure: 0.2439 gr
weggewandertes Wasser: — 0.012 gr.
Mit 1 Molekül Buttersäure wandern — 0,2 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.1262 gr Buttersäure.

Dauer der Diffusion: $10^3/_4$ Tage.
Temperatur: 12.15° bis 14,15°.

Versuch 4.

Analisyrte Menge: 8.3896 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.2004 gr	Silbernitrat	0.2004 gr
0.4671 gr	Buttersäure	0.2576 gr
7.692 gr	Wasser	7.932 gr

weggewanderte Buttersäure: 0.2095 gr
weggewandertes Wasser: 0.030 gr.
Mit 1 Molekül Buttersäure wandern 0,7 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.1045 gr Buttersäure.

Dauer der Diffusion: $10^3/_4$ Tage.
Temperatur: 12,15° bis 14,15°.

Versuch 5.

Analysirte Menge: 6.5690 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1549 gr	Silbernitrat	0.1549 gr
0.3610 gr	Buttersäure	0.2944 gr
6.156 gr	Wasser	6.120 gr

weggewanderte Buttersäure: 0.0666 gr
weggewandertes Wasser: 0.036 gr.
Mit 1 Molekül Buttersäure wandern 2,6 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0430 gr Buttersäure.

Dauer der Diffusion: $3^1/_4$ Tage.
Temperatur: 14,5° bis 15,1°.

Versuch 6.

Analysirte Menge: 6.2464 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.1462 gr	Silbernitrat	0.1462 gr
0.3407 gr	Buttersäure	0.2809 gr
5.809 gr	Wasser	5.819 gr

weggewanderte Buttersäure: 0.0598 gr

weggewandertes Wasser: —0.010 gr.

Mit 1 Molekül Buttersäure wandern —0,8 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0409 gr Buttersäure.

Dauer der Diffusion: 3¼ Tage.

Temperatur: 14,5° bis 15,1°.

Essigsäure, ca. ½ normal.

Zusammensetzung der Lösung.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat kommen:

	Essigsäure	Wasser
1.	0.0415 gr	1.138 gr
2.	0.0415	1.133
3.	0.0417	1.136
4.	0.0415	1.137
Mittel:	0.04155 gr	1.136 gr

auf 1000 gr Wasser kommen { 0.6093 gr Moleküle Essigsäure. 0.5178 gr Moleküle Silbernitrat.

Versuch 1.

Analysirte Menge: 7.8354 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.6192 gr	Silbernitrat	0.6192 gr
0.2571 gr	Essigsäure	0.1246 gr
7.034 gr	Wasser	7.092 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1335 gr

weggewandertes Wasser: —0.058 gr.

Mit 1 gr Essigsäure wandern —0.4345 gr Wasser.

Mit 1 Molekül Essigsäure wandern —1,4 Moleküle Wasser.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0216 gr Essigsäure.

Dauer der Diffusion: 9 Tage.

Temperatur: 13,3° bis 13,8°.

Versuch 2.

Analysirte Menge: 8.3698 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.6629 gr	Silbernitrat	0.6629 gr
0.2753 gr	Essigsäure	0.1190 gr
7.530 gr	Wasser	7.588 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1563 gr
weggewandertes Wasser: — 0.058 gr
Mit 1 gr Essigsäure wandern — 0.3711 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern — 1,2 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0236 gr Essigsäure.

Dauer der Diffusion: 11 Tage.
Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Versuch 3.

Analysirte Menge: 8.9998 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.7125 gr	Silbernitrat	0.7125 gr
0.2959 gr	Essigsäure	0.1282 gr
8.094 gr	Wasser	8.159 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1677 gr
weggewandertes Wasser: — 0.065 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern — 0.3876 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern — 1,3 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0235 gr. Essigsäure.

Dauer der Diffusion: 11 Tage.
Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Essigsäure, ca. 1 normal.

Zusammensetzung der Lösung.

Auf 0.1000 gr Silbernitrat kommen:

	Essigsäure	Wasser
1.	0.0712 gr	1.183 gr
2.	0.0712	1.181
3.	0.0711	1.180
4.	0.0708	1.179
5.	0.0708	1.178
Mittel	0.0710 gr	1.180 gr

auf 1000 gr Wasser kommen { 1.003 gr — Moleküle Essigsäure.
0.4985 gr — Moleküle Silbernitrat.

Versuch 1.

Analysirte Menge: 6.7494 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.5066 gr	Silbernitrat	0.5066 gr
0.3597 gr	Essigsäure	0.2054 gr
5.978 gr	Wasser	6.037 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1543 gr
weggewandertes Wasser: —0.059 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern —0.3824 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern —1,3 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0305 gr Essigsäure.
Dauer der Diffusion: 5 Tage.
Temperatur: 13,8° bis 14,5°.

Versuch 2.

Analysirte Menge: 9.3136 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.6979 gr	Silbernitrat	0.6979 gr
0.4955 gr	Essigsäure	0.3175 gr
8.236 gr	Wasser	8.298 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1780 gr
weggewandertes Wasser: — 0.062 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern — 0.3483 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern — 1,2 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0255 gr Essigsäure.
Dauer der Diffusion: 5 Tage.
Temperatur: 13.8° bis 14,5°.

Versuch 3.

Analysirte Menge: 6.4002 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.4818 gr	Silbernitrat	0.4818 gr
0.3421 gr	Essigsäure	0.1692 gr
5.685 gr	Wasser	5.748 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1729 gr
weggewandertes Wasser: — 0.063 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern — 0.3644 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern — 1,2 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0359 gr Essigsäure.
Dauer der Diffusion: 8 Tage.
Temperatur: 13,3° bis 14,2°.

Versuch 4.

Analysirte Menge: 7,1759 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.5356 gr	Silbernitrat	0.5356 gr
0.3803 gr	Essigsäure	0.2459 gr
6.320 gr	Wassser	6.394 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.1344 gr
weggewandertes Wasser: —0.074 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern: —0.5506 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern —1,8 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0251 gr Essigsäure.

Dauer der Diffusion: 5¾ Tage.
Temperatur: 13,3° bis 13,9°.

Essigsäure, ca. 2 normal.

Zusammensetzung der Lösung

Auf 0.1000 gr Silbernitrat kommen:

	Essigsäure	Wasser
1.	0.1580 gr	1.138 gr
2.	0.1564	1.144
3.	0.1571	1.141
4.	0.1593	1.136
Mittel:	0.1577 gr	1.140 gr

auf 1000 gr Wasser kommen { 2.306 gr Moleküle Essigsäure. 0.5160 gr Moleküle Silbernitrat.

Versuch 1.

Analysirte Menge: 7.2852 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.5515 gr	Silbernitrat	0.5515 gr
0.8698 gr	Essigsäure	0.3647 gr
6.288 gr	Wasser	6.369 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.5051 gr
weggewandertes Wasser: —0.081 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern —0.1604 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern —0,5 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0916 gr Essigsäure.

Dauer der Diffusion: 10 Tage.
Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Versuch 2.

Analysirte Menge: 8.0632 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.6081 gr	Silbernitrat	0.6081 gr
0.9589 gr	Essigsäure	0.4438 gr
6.932 gr	Wasser	7.011 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.5151 gr
weggewandertes Wasser: —0.079 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern —0.1534 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern —0.5 Moleküle Wasser.
Auf 0.1000 gr Silbernitrat bezogen sind gewandert 0.0847 gr Essigsäure.

Dauer der Diffusion: 10 Tage.
Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Versuch 3.

Analysirte Menge: 8.4057 gr.

Zusammensetzung der Lösung

vor dem Versuch		nach dem Versuch
0.6329 gr	Silbernitrat	0.6329 gr
0.9981 gr	Essigsäure	0.4691 gr
7.215 gr	Wasser	7.304 gr

weggewanderte Essigsäure: 0.5290 gr
weggewandertes Wasser: —0.089 gr.
Mit 1 gr Essigsäure wandern —0,1682 gr Wasser.
Mit 1 Molekül Essigsäure wandern —0,6 Moleküle Wasser.

Dauer der Diffusion: 10 Tage.
Temperatur: 13,3° bis 14,1°.

Zusammenstellung der Resultate.

Borsäure, ca. 1/2 normal.

gewanderte Borsäure, auf 0,1 gr Indicator bezogen:	pro 1 Molekül Borsäure wandern Moleküle Wasser:
0.0397 gr	+0.6
0.0419	+0.9
0.0542	0
0.0548	−1.2
0.0568	−1.0
0.0605	−2,1

Buttersäure, ca. $^1/_2$ normal.

gewanderte Buttersäure, auf 0,1 gr Indicator bezogen:	pro 1 Molekül Buttersäure wandern Moleküle Wasser:
0.0409 gr	— 0.8
0.0430	+ 2.6
0.1045	+ 0.7
0.1152	— 0.2
0.1216	— 0.4
0.1262	— 0.2.

Silbernitrat, ca. $^1/_2$ normal.

gewandertes Silbernitrat, auf 0.1 gr Indicator bezogen:	pro 1 Molekül Silbernitrat wandern Moleküle Wasser:
0.1192 gr	— 5.3
0.1206	— 4.9
0.1283	— 6.5
0.1301	— 4.5
0.1441	— 4.3
0.1806	— 2.6.

Essigsäure ca.	Essigsäure ca.	gewanderte Essigsäure auf 0.1 gr Indicator bezogen	pro 1 Molekül Essigsäure wandern Moleküle Wasser
$^1/_2$ normal	3%	0.0216 gr	—1.4
$^1/_2$ „	3%	0.0235	— 1.3
$^1/_2$ „	3%	0.0236	— 1.2
1 „	6%	0.0251	— 1.8
1 „	6%	0.0255	— 1.2
1 „	6%	0.0305	— 1.3
1 „	6%	0.0359	— 1.2
2 „	12%	0.0836	— 0.6
2 „	12%	0.0847	— 0.5
2 „	12%	0.0916	— 0.5.

Zunächst ergibt sich, daß durch diese Versuche die von Mendelejeff, dann von Pickering gemachte Annahme bedeutender Hydratation gelöster Stoffe nicht bestätigt wird; bei allen Versuchen ist die Molekülzahl wandernden Lösungsmittels eine sehr geringe.

Es zeigt sich, daß wenn 1 Molekül Silbernitrat bezw. Essigsäure diffundirt, eine Anzahl Moleküle Wasser in entgegengesetzter Richtung wandert, das heißt die bereits besprochene Diffusion des Lösungsmittels überwiegt die etwa vorhandene Hydratation. Es ist zu vermuten, daß ähnliche Resultate sich auch für Borsäure und für Buttersäure ergeben, da diese letzteren Versuche aus be-

reits angeführtem Grunde (geringere Concentration des Indicators, daher geringere Titrationsgenauigkeit desselben) weniger Gewicht haben. Ferner zeigen die mit Essigsäure in verschiedener Anfangsconcentration vorgenommenen Versuche mit Zunahme der anfänglichen Essigsäureconcentration eine Abnahme der in entgegengesetzter Richtung diffundirenden Wassermenge, während die Theorie eine Zunahme der letzteren vorsieht. Das Massenwirkungsgesetz liefert für sehr verdünnte Lösungen die Beziehung der Unabhängigkeit des hydratisirten Anteils von der Concentration[1], gibt allgemein jedoch keine Auskunft über Ab- oder Zunahme der Hydratation bei Concentrationsänderung concentrirterer Lösungen. Zulässig wäre daher zur Erklärung der bei Essigsäure gemachten Erfahrungen die Annahme einer bei Essigsäure vorhandenen Hydratation, die mit Wachsen der Concentration steigt.

Ist nun auch nicht das bei Beginn dieser Untersuchung vorschwebende Ziel einer abschließenden Bestimmung der Hydratation gelöster Körper erreicht, so können wir doch als Ergebnisse die folgenden namhaft machen. Erstens: Essigsäure, Buttersäure, Borsäure, Silbernitrat verbinden sich, in Wasser gelöst, entweder nicht mit dem Lösungsmittel oder nur mit einer sehr geringen Molekülzahl desselben. Zweitens: durch den Versuch ist nachgewiesen, daß in nicht sehr verdünnten Lösungen das Lösungsmittel an der Diffusion sich beteiligt.

---

1) Vgl. Nernst, Theoret. Chemie 2, 491/492.

Zur Frage nach der Hydratation gelöster Substanzen. III.

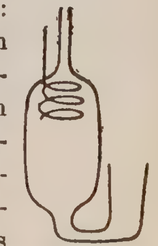
Von

C. C. Garrard und E. Oppermann.

Mit einer Textfigur.

Vorgelegt von Herrn W. Nernst in der Sitzung am 3. März 1900.

Fügt man zu der Lösung eines Electrolyten einen Nichtelectrolyt, so muß nach dem Stromdurchgang, wenn thatsächlich Wasser mit den Jonen überführt wird, eine Koncentrationsänderung des Nichtelectrolyten stattfinden. Ist kein Wasser mitgenommen, so muß diese Konzentration konstant bleiben.



Die Beobachtungen wurden wie folgt ausgeführt: In ein Becherglas wurde die Lösung gethan; am Boden des Glases befand sich die eine Electrode, ein Platinblech; die andere, eine Spirale aus Platindraht, umgeben von einem kleinen Glasapparat, dessen Gestalt beistehende Figur zeigt, hing im oberen Teile der Flüssigkeit. Dieser Apparat wurde vor jedem Versuch gewogen. Nach der Electrolyse wurde er vorsichtig aus der umgebenden Flüssigkeit genommen, sodaß die innen befindliche Lösung nicht herauslief, was man leicht bewirkt, indem man mit dem Finger das nach obenführende Glasrohr verschließt. Der Apparat wurde dann in einem Wägeglas gewogen, und es ergab sich das Gewicht der Flüssigkeit. Diese wurde auf ein bestimmtes Volum verdünnt und die Gewichtmenge Electrolyt, Nichtelectrolyt und Wasser bestimmt, eine Messung die jedes Mal an der Lösung vor und nach der Electrolyse unter genau den gleichen Bedingungen mit demselben Apparat, derselben Bürette u. s. w. ausgeführt wurde.

Aus dem Unterschied der Analysen vor und nach der Electrolyse ermittelt man also die Aenderung der Konzentration des Nichtelectrolyten, die maaßgebend für die Menge überführten Wassers ist.

Die Stromrichtung wurde immer so gewählt, daß eine Konzentrationszunahme an der kleinen Electrode im Glasapparat stattfand. Die gefundene Aenderung konnte nicht von Versuchsfehlern herrühren, weil alle wahrscheinlichen Fehler einer Konzentrationszunahme entgegenwirken. Die Strommenge wurde durch ein Kupfervoltameter gemessen und die ganze Electrolysirzelle auf konstanter Temperatur erhalten.

So einfach die Methode aussieht, so haben sich doch bei der praktischen Ausführung der Messungen manche Schwierigkeiten herausgestellt. Als Nichtelectrolyte wurden zuerst die organischen Substanzen versucht. Da aber diese der electrolytischen Dissociation nicht unterliegen, so ist ihre Bestimmung unter den genauen Versuchsbedingungen sehr schwierig. Es kommt noch zweitens hinzu, daß die organischen Stoffe in jedem Falle an der Kathode reducirt, an der Anode oxydirt werden. So mußten aus den angeführten Gründen Zucker, Phenol, Harnstoff, Essigsäure, die bei Gegenwart einer starken Säure, praktisch vollständig nicht dissociirt ist, aufgegeben werden.

Es wurde immer so verfahren, daß durch den Electrolyten die zwar schon äußerst geringfügige Dissociation des Nichtelectrolyten noch zurückgedrängt wurde. Diesem Gedanken folgend empfahl sich Borsäure zur Untersuchung der Neutralsalze der Borsäure, denn wegen der beinah vollständigen Dissociation der Neutralsalze, ist die Borsäure fast garnicht dissociirt.

Aber auch die Neutralsalze erwiesen sich als unbrauchbar. Denn operirten wir z. B. mit borsaurem Kali, so wurde an der Kathode Kaliumhydroxyd gebildet, das mit der freien Borsäure unter Bildung von Borax reagirte, welch letzterer Körper auskrystallisirte. An der Anode bildete sich Borsäure und wurde hier die Konzentration derselben sehr verstärkt. Nach dieser Methode ist also die Untersuchung der Neutralsalze nicht ausführbar.

Borsäure ist aber vorzüglich geeignet zur Untersuchung der Ueberführung starker Säuren.

In einer Lösung derselben ist die Borsäure garnicht dissociirt. Auch ließen sich die Analysen der Lösungen leicht ausführen.

Man bestimmt zunächst mit $\frac{n}{20}$ Barytwasser und Methylorange als Indikator die starke Säure, fügt zu derselben Lösung alsdann

20 cc einer zehnprozentigen Lösung Mannit. Die Borsäure reagirt mit dem Mannit unter Bildung einer ziemlich starken, einbasischen Säure, die mittelst Phenolphtaleïn und desselben $\frac{n}{20}$ Barytwassers sich gut bestimmen läßt. Auf diese Weise lassen sich in einer Menge Lösung beide Säuren nebeneinander genau und bequem nachweisen.

Nach der angegebenen Methode wurden Messungen an Salzsäure, Bromwasserstoffsäure, Salpeter- und Schwefelsäure ausgeführt.

Zur Untersuchung starker Basen könnte man dieselbe Methode wie bei den Säuren anwenden, indem man als Nichtelektrolyt eine schwache Base benutzt.

Aber hier trat uns der Mangel an einem geeigneten Stoff entgegen. Fast alle sind entweder zu stark dissociirt oder zu unlöslich. Die einzige Substanz, an deren Verwendung man denken konnte, war Ammoniak; aber es stellte sich heraus, daß die Lösungen von Ammoniak mit starken Basen (wie beim Kaliumhydroxyd) zu unbeständig sind. Selbst die verdünntesten Lösungen setzen fortdauernd Ammoniak in Freiheit.

Resultate.

Vorausgesetzt, daß Wasserstoff nicht hydratisirt ist, führen die negativen Jonen $\overline{Cl}$, $\overline{Br}$, $\overline{NO_3}$ und $\overline{SO_4}$ nachfolgende Anzahl Moleküle Wasser mit.

$\overline{Cl}$.	$\overline{Br}$.	$\overline{NO_3}$	$\overline{S\overline{O_4}}$
7.4	3.1	2.1	6.5
5.0	5.2	1.8	17.1
3.1	4.9	1.2	8.8
5.4	5.6	4.1	
1.6	2.6	2.7	
2.0	3.2	3.0	

Die Fehlergrenze, der obige Zahlen, insoweit sie von der Analyse abhängen, unterliegen ist sehr groß. Die gemessene Aenderung der Konzentration beträgt gewöhnlich etwa 1°/o, die als Unterschied zweier Analysen gefunden ist. Jede Analyse ist bis auf 0.2—0.3°/o genau; der Unterschied zweier solcher Analysen hat also eine Genauigkeit von 0.5°/o, was auf eine Konzentrationsänderung von 1°/o eine mögliche Fehlergrenze von 50°/o ergiebt. Man erhält als Mittelwerte von $\overline{Cl}$, $\overline{Br}$, $\overline{NO_3}$ respektive 5; 4; 2,5 Moleküle Wasser.

Die Zersetzlichkeit des Jodwasserstoffs verhinderte bis jetzt die Untersuchung des $\overline{J}$.

$\overline{NO_3}$ hat wohl etwas weniger Wasser als $\overline{Cl}$ oder $\overline{Br}$ und die drei Versuche über $\overline{SO_4}$ zeigen, daß dieses mehr Moleküle Wasser als $\overline{Cl}$, $\overline{Br}$ und $\overline{NO_3}$ mitführt.

Zur Kontrolle über die Zuverlässigkeit der angeführten Versuche wurden die gewöhnlichen Ueberführungszahlen der Substanzen aus unsern erhaltenen Zahlen berechnet. Für Bromwasserstoff sind diese Werte

1)	0.166	Mittelwert 0.169.
2)	0.171	
3)	0.176	
4)	0.166	
5)	0.170	
6)	0.165	

Aus der Wanderungsgeschwindigkeit berechnet sich die Ueberführungszahl zu 0.164.

Wenn man bedenkt, daß unsere Versuche nicht zur Messung der gewöhnlichen Ueberführungszahlen bestimmt sind, so kann die Uebereinstimmung als befriedigend angesehen werden.

Wir bemerken, daß die mitgeteilten Resultate der sehr diffizilen Messungen nur vorläufiger Natur sein sollen, und betrachten als Hauptsache das Ergebniß, daß, wie auch die vorstehend beschriebenen Versuche des Herrn Dr. Lotmar gezeigt haben, die Hydratation gelöster Substanzen jedenfalls nur gering sein kann. Die Arbeit wird fortgesetzt und hoffen wir bald genauere Ergebnisse mitteilen zu können.

Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern.

Von

Hermann Minkowski in Zürich.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 3. März 1900.

In der Theorie der algebraischen Zahlen ist die Frage von Interesse, ob in einem beliebigen Galois'schen Körper stets eine Einheit existirt, welche unter ihren conjugirten Zahlen ein vollständiges System unabhängiger Einheiten des Körpers darbietet. Durch die folgenden Betrachtungen wird diese Frage in bejahendem Sinne entschieden.

1. Ich benutze dabei hauptsächlich den nachstehenden Satz über das Nichtverschwinden einer gewissen Determinante:

Hülfssatz. *Sind in einer m-reihigen Determinante*

$$A = | a_{hk} | \qquad (h, k = 1, 2, \dots m)$$

von m^2 *reellen Größen alle Glieder* a_{hk} *außerhalb der Hauptdiagonale (also für* $h \gtrless k$*)* < 0 *und sind ferner die Summen*

$$a_{h1} + a_{h2} + \cdots + a_{hm} = s_h \qquad (h = 1, 2, \dots m)$$

der Glieder in den einzelnen Horizontalreihen durchweg > 0, *so ist die Determinante stets* > 0.

Beweis. Für $m = 1$ ist der Satz selbstverständlich. Um ihn für einen bestimmten Werth $m > 1$ zu erweisen, nehmen wir an, daß er für alle kleineren Werthe des m bereits sicher gestellt sei. Wir setzen $a_{hh} = s_h + \alpha_{hh}$ $(h = 1, 2, \dots m)$ und entwickeln die Determinante A nach den m Größen $s_1, s_2, \dots s_m$. Das von $s_1, s_2, \dots s_m$ freie Glied dieser Entwickelung wird eine m-reihige Determinante A^*, bei welcher in jeder Horizontalreihe die Summe aller Glieder Null ist und welche daher den Werth Null hat. Weiter wird der

Coefficient eines Products $s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_l}$, wenn $l \geqq 1$ und $< m$ ist, eine Determinante von $m-l$, also weniger als m Reihen, in welcher alle Glieder außerhalb der Hauptdiagonale negativ sind und in jeder Horizontalreihe die Summe der Glieder größer als die Summe der Glieder der entsprechenden Horizontalreihe von A^*, also gewiß > 0 ist. Auf Grund der von uns gemachten Voraussetzung erweist sich daher jeder dieser Coefficienten > 0. Außerdem erscheint in jener Entwickelung noch das Glied $s_1 s_2 \dots s_m$. Nach dieser Zusammensetzung der Determinante A aus lauter positiven Termen ist sie offenber > 0.

2. Es sei jetzt θ eine algebraische Zahl n^{ten} Grades und unter den n verschiedenen conjugirten algebraischen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$, von denen θ ein Werth ist, seien r reelle und $\frac{1}{2}(n-r)$ Paare von conjugirt imaginären Zahlen vorhanden. Von dem Falle $n = 2$, $r = 0$ wollen wir absehen. Wir setzen $r + \frac{1}{2}(n-r) = m+1$, und wir wollen annehmen, daß in der Reihe der $m+1$ ersten Zahlen $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{m+1}$ die sämmtlichen reellen jener Zahlen und ferner je eine Zahl aus jedem der Paare conjugirt imaginärer Zahlen sich befinden; zudem möge die Zahl θ selbst unter diesen $m+1$ Zahlen vorhanden sein. Ist ε eine Einheit in dem algebraischen Körper von θ, so wollen wir mit $l_h(\varepsilon)$ für $h = 1, 2, \dots m+1$ den reellen Theil des Logarithmus der zu ε conjugirten Zahl im Körper von θ_h oder das Doppelte dieses reellen Theils verstehen, je nachdem die Zahl θ_h reell oder imaginär ist. Da die Norm einer Einheit gleich ± 1 ist, gilt dann stets:

$$1) \qquad l_1(\varepsilon) + l_2(\varepsilon) + \dots + l_{m+1}(\varepsilon) = 0.$$

Wie Dirichlet gezeigt hat, kann man in dem Körper von θ stets eine Einheit derart bestimmen, daß von ihren conjugirten Zahlen in den Körpern von $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{m+1}$ alle bis auf eine Zahl in einem beliebig angenommenen dieser Körper absolute Beträge < 1 haben. Es sei in solcher Weise $\varepsilon^{(h)}$ für $h = 1, 2, \dots m$ eine Einheit, für welche $l_1(\varepsilon^{(h)}), \dots l_{h-1}(\varepsilon^{(h)})$, $l_{h+1}(\varepsilon^{(h)}), \dots l_{m+1}(\varepsilon^{(h)})$, also sämmtliche Werthe $l_k(\varepsilon^{(h)})$ für $k \gtrless h$ negativ ausfallen. Dann ist mit Rücksicht auf 1):

$$l_1(\varepsilon^{(h)}) + \dots + l_h(\varepsilon^{(h)}) + \dots + l_m(\varepsilon^{(h)}) > 0.$$

Die Determinante

$$| l_k(\varepsilon^{(h)}) | \qquad (h, k = 1, 2, \dots m)$$

trägt danach diesen Charakter, daß in ihr jeder Coefficient außerhalb der Hauptdiagonale negativ ist und die Summe der Glieder in jeder Horizontalreihe positiv ist. Dem Hülfssatze in 1. zufolge

ist daher diese Determinante > 0. Somit bilden die hier charakterisirten Einheiten $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots \varepsilon^{(m)}$ ein vollständiges System von unabhängigen Einheiten im Körper von θ.

Bei der Methode, welche Dirichlet zur Herstellung eines vollständigen Systems von unabhängigen Einheiten in einem Zahlkörper gegeben hat, werden die Einheiten des Systems successive bestimmt, wobei zur Ermittlung einer weiteren Einheit, so lange das System noch nicht vollständig ist, gewisse Determinanten aus den Logarithmen der früher bestimmten Einheiten und ihrer conjugirten Zahlen bekannt sein müssen. Nach dem hier Auseinandergesetzten ist es dagegen stets möglich, Einheiten in der erforderlichen Anzahl gesondert, jede für sich, zu bestimmen mit dem Erfolge, daß sie zusammen ein vollständiges System unabhängiger Einheiten ergeben.

3. Es sei jetzt der Körper von θ ein Galois'scher Körper, sodaß sich jede der Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ als eine rationale Function mit rationalen Coefficienten von jeder anderen dieser Zahlen darstellen läßt. Es sei in solcher Weise

$$\theta_h = R_h(\theta), \ \theta = S_h(\theta_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

wo R_h, S_h Zeichen für rationale Function mit rationalen Coefficienten sind, so gilt $S_h(R_h(\theta)) = \theta$ und infolgedessen auch allgemein $S_h(R_h(\theta_k)) = \theta_k$ für jeden Index $k = 1, 2, \ldots n$. Je nachdem θ reell oder imaginär ist, sind auch die conjugirten Zahlen alle reell oder alle imaginär, und hat man also $m+1 = n$ oder $= \frac{1}{2} n$.

Wir bestimmen im Körper von θ eine Einheit $\varepsilon = f(\theta)$, wo $f(\theta)$ eine rationale Function mit rationalen Coefficienten von θ bedeute, so daß von den $m+1$ conjugirten Zahlen $f(\theta_1), f(\theta_2), \ldots f(\theta_{m+1})$ alle mit Ausnahme der einen Zahl $f(\theta)$ absolute Beträge < 1 haben. Sodann sei ε_h für $h = 1, 2, \ldots m+1$ die conjugirte Zahl zu ε in dem Körper von θ_h, also $\varepsilon_h = f(\theta_h) = f(R_h(\theta))$; dabei ist ε_h jedesmal selbst eine Zahl im Körper von θ und sind deren conjugirte Zahlen in den Körpern von $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{m+1}$ bezüglich

$$2) \qquad f(R_h(\theta_1)), f(R_h(\theta_2)), \ldots f(R_h(\theta_{m+1})).$$

Nun hat man bei beliebigen Werthen h, k aus der Reihe $1, 2, \ldots m+1$ stets $R_h(\theta_k) = R_h(R_k(\theta)) = \theta_g$, wo g einen der Indices $1, 2, \ldots n$ bedeutet. Dabei kann nicht für zwei verschiedene Indices k bei demselben Index h hier derselbe Werth θ_g und können auch nicht conjugirt imaginäre Werthe θ_g resultiren, da aus dieser Relation umgekehrt $\theta_k = S_h(\theta_g)$ folgt und unter den Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{m+1}$ keine zwei gleich oder conjugirt imaginär sind. Danach sind die

absoluten Beträge der Größen in 2) abgesehen von der Reihenfolge identisch mit den Beträgen der Größen $f(\theta_1), f(\theta_2), \ldots f(\theta_{m+1})$, es ist also einer jener Beträge > 1 und die m anderen sind sämmtlich < 1, und zwar ist für denjenigen Index k der Betrag $|f(R_h(\theta_k))| > 1$, für den $R_h(\theta_k)$ gleich θ bezüglich gleich der conjugirt imaginären Zahl, also θ_k gleich $S_h(\theta)$ bezüglich gleich der conjugirt imaginären Zahl ist. Für verschiedene Werthe h der Reihe $1, 2, \ldots m+1$ wird der hier in Betracht kommende Index k aus der Reihe $1, 2, \ldots m+1$ jedesmal ein anderer sein. Nach den Auseinandersetzungen in 2. bilden nunmehr irgend m der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m+1}$ ein vollständiges System von unabhängigen Einheiten in dem Galois'schen Körper von θ. Auf diese Weise resultirt der Satz:

In einem Galois'schen Körper kann man stets eine solche Einheit angeben, daß eine jede Einheit dieses Körpers ein Product aus einer Einheitswurzel und aus Potenzen dieser Einheit und ihrer conjugirten Einheiten mit rationalen Exponenten ist.

Da ein jeder algebraischer Körper ein Unterkörper eines Galois'schen Körpers ist und seine Einheiten dann zugleich als Einheiten des Galois'schen Körpers auftreten, ist hierdurch zugleich ein bemerkenswerther Satz über die Einheiten in einem beliebigen algebraischen Körper gewonnen.

Zürich, den 23. Februar 1900.

Ueber einen Satz des Herrn Schönflies aus der Theorie der Functionen zweier reeller Veränderlichen.

Von

W. F. Osgood, Cambridge, Mass., U.S.A.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 16. März 1900.

1. Herr Schönflies hat neuerdings den folgenden Satz bewiesen[1]):

Sind $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ zwei Functionen der unabhängigen reellen Veränderlichen (x,y), welche im Quadrat (T): $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$,

a) eindeutig definirt und stetig;

b) eindeutig umkehrbar sind,

und setzt man

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

so füllen die Bildpunkte (ξ, η) in der (ξ, η)-Ebene das Innere und den Rand einer geschlossenen Jordan'schen Curve[2]) lückenlos aus.

Mit „eindeutig umkehrbar" ist gemeint, daß, unter (ξ', η') der Bildpunkt eines beliebigen Punktes (x', y') des Quadrats verstanden, die Gleichungen

$$\xi' = \varphi(x,y), \qquad \eta' = \psi(x,y)$$

nur eine dem Quadrat angehörige Lösung (x', y') zulassen.

---

1) In den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. 1899, Heft 3, S. 282.

2) D. h. einer stetigen geschlossenen Curve ohne mehrfachen Punkt, wie sie von C. Jordan in seinem Cours d'Analyse, 2. Aufl., Bd. I, § 96 ff. (1893) betrachtet siud.

Ich habe zwei einfache Beweise dieses Satzes gefunden, die ich hiermit mitteile.

2. Erster Beweis. Diesem Beweise liegt eine Stetigkeitsüberlegung zu Grunde. Der Rand des Quadrats geht, wie Herr Schönflies bemerkt, in eine geschlossene Jordan'sche Curve ω der (ξ, η)-Ebene über. Eine solche Curve zerlegt die Ebene, wie C. Jordan bewiesen hat, in äußere und innere Punkte, und man überzeugt sich leicht, daß die anderen Bildpunkte entweder alle innerhalb oder alle außerhalb ω liegen. Sei P ein beliebiger innerer Punkt von (T); p, der Bildpunkt von P. Wir wollen zunächst annehmen, daß p ein innerer Punkt von ω sei, und dann zeigen, daß ein beliebiger zweiter innerer Punkt μ von ω auch Bildpunkt eines gewissen Punktes m des Quadrats ist.

In der That sei

$$r = f(\theta)$$

die Gleichung des Randes des Quadrats in Polarcoordinaten, deren Pol der Punkt P ist. Setzt man

$$r = \alpha f(\theta)$$

und läßt man den Parameter α stetig von 1 bis 0 abnehmen, so fegt dieses veränderliche Quadrat das Innere von (T) gerade einmal aus. Es soll gezeigt werden, daß die Bildcurve (α) das Innere von ω auch gerade einmal ausfegt. Dazu genügt der Beweis, daß es einen Wert $\alpha = \alpha_0$ giebt, derart daß die Curve (α_0) durch den Punkt μ geht, denn sämtliche Punkte einer Curve (α) entsprechen ja als Bildpunkte Punkten von (T).

3. Hilfssatz. Ist μ ein innerer (äußerer) Punkt von (α'), so ist μ auch ein innerer (äußerer) Punkt von (α), wo $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon$ ist.

Der Beweis beruht auf dem Umstand, daß die Curve (α) sich der Curve (α') gleichmäßig nähert, wenn α gegen α' convergirt. Die Curve (α) läßt sich nämlich durch die Formeln darstellen:

$$\xi = \varphi\{\alpha f(\theta)\cos\theta,\ \alpha f(\theta)\sin\theta\}, \quad \eta = \psi\{\alpha f(\theta)\cos\theta,\ \alpha f(\theta)\sin\theta\}$$

woraus denn erhellt, daß ξ, η stetige Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen (α, θ) sind, wo $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ ist. Einer beliebigen positiven Größe δ wird sich also eine zweite positive von θ unabhängige Größe ε stets so zuordnen lassen, daß der Abstand zweier demselben Wert von θ entsprechender Punkte kleiner bleibt als δ, sobald $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon$ ist. Man braucht daher δ bloß kleiner anzunehmen als der Abstand des Punktes μ vom nächsten Punkte der Curve (α'), und der Satz ist bewiesen.

4. Für große Werte von α ist μ sicher ein innerer Punkt von (α), und für kleine Werte von α ein äußerer Punkt. Es möge α_0 die untere Grenze derjenigen Werte von α sein, deren entsprechende Curven (α) den Punkt μ einschließen. Dann ist $\alpha_0 > 0$ und ich behaupte: Die Curve (α_0) geht durch μ. Denn, μ kann kein innerer Punkt von (α_0) sein; sonst wäre μ nach dem Hilfssatz auch innerer Punkt von $(\alpha_0 - \frac{1}{2}\varepsilon)$ und α_0 wäre nicht die betr. untere Grenze. Ebensowenig kann μ äußerer Punkt von (α_0) sein; denn μ wäre dann äußerer Punkt aller Curven (α), wofür $\alpha_0 \leqq \alpha < \alpha_0 + \varepsilon$ ist. Es bleibt somit nur noch die eine Möglichkeit übrig, daß μ auf (α_0) liegt.

5. Es erübrigt noch die Annahme zu rechtfertigen, daß p ein innerer Punkt von ω sei. Im anderen Fall würde p für kleine Werte von α ein innerer Punkt, für große Werte ein äußerer Punkt der Curve (α) sein. Sei $\bar{\alpha}$ die obere Grenze derjenigen Werte von α, wofür p ein innerer Punkt von (α) ist. Dann zeigt man, wie in Nr. 4, daß p weder innerer noch äußerer Punkt von $(\bar{\alpha})$ sein kann. Aber auf $(\bar{\alpha})$ kann p auch nicht liegen, sonst würde p außer P noch einem zweiten Punkt von (T) entsprechen. Es kann also keinen außerhalb ω liegenden Bildpunkt p geben und dieser Beweis des Schönflies'schen Satzes ist fertig.

6. Zweiter Beweis. Den Ausgangspunkt bildet wiederum der Umstand, daß der Rand des Quadrats in eine geschlossene Jordan'sche Curve ω übergeht. Sei P ein beliebiger innerer Punkt von (T), p, der Bildpunkt in der (ξ, η)-Ebene.

Hilfssatz. Ist μ ein beliebiger Punkt der (ξ, η)-Ebene, der sich mit p durch eine Curve verbinden läßt, welche ω nicht schneidet, so ist μ Bildpunkt eines Punktes m von (T).

Bemerken wir vorab, daß die Menge der Bildpunkte in der (ξ, η)-Ebene eine perfecte ist[1]).

Ist der Abstand des Punktes μ von ω geringer als von p, so wird man einen Punkt q, von μ ausgehend, die Curve stetig durchlaufen lassen. Derselbe wird zunächst nur mit Punkten zusammenfallen, die, wie μ, keine Bildpunkte sind, — wofern der Satz nicht von vornherein zugestanden wird. Die obere Grenze p_1 dieser stetigen Folge von Nicht-Bildpunkten wird aber ein Bildpunkt sein. Auf der Strecke (μ, p_1) wird man dann einen Punkt μ_1 so annehmen, daß sein Abstand von p_1 kleiner ist als von ω. Nun

1) Dieser Satz ist von Herrn Schönflies bewiesen; er steht aber bereits nebst Beweis bei C. Jordan, a. a. O., § 64.

schlage man um μ_1 als Mittelpunkt einen Kreis von so kleinem Radius ϱ, daß er keinen Bildpunkt einschließt, und lasse man ϱ dann wachsen, bis der Kreis einen Bildpunkt p_0 auf seiner Peripherie, aber keinen im Innern aufweist. Der entsprechende Wert von ϱ sei mit ϱ_0 bezeichnet. Der Kreis wird nicht bis ω heranreichen.

Um den Punkt P_0 des Quadrats als Mittelpunkt, dessen Bildpunkt p_0 ist, sei ein Kreis von so kleinem Radius beschrieben, daß die Bildcurve, c, — eine geschlossene Jordan'sche Curve — ganz innerhalb eines Kreises um p_0 mit Radius ϱ_0 liegt. Man beweist leicht, daß p_0 innerhalb c liegt. Nun schneidet aber jeder von einem beliebigen innern Punkte einer Jordan'schen Curve aus gezogene Halbstrahl die Curve. Der Halbstrahl $p_0 \mu_1$ schneidet c nicht. Aus diesem Widerspruch ergiebt sich die Richtigkeit des Hilfssatzes.

7. Beweis des Hauptsatzes. Der Bildpunkt p eines beliebigen Punktes P von (T) kann nicht außerhalb ω liegen. In der That bleiben die stetigen Functionen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ auf dem perfecten Bereich (T) dem absoluten Betrage nach beide unterhalb einer festen Größe G. Der Punkt $\xi = \eta = G$ ist also sicher kein Bildpunkt eines Punktes von (T). Dieser Punkt läßt sich aber mit jedem äußern Punkt von ω durch eine Curve verbinden, die ω nicht schneidet. Die Bildpunkte liegen also sämtlich innerhalb ω, und da man zwei beliebige innere Punkte mit einander durch eine Curve verbinden kann, die ω nicht schneidet, so ist jeder innere Punkt von ω Bildpunkt eines Punktes von (T).

Es sei noch bemerkt, daß der Schönflies'sche Beweis des vorhergehenden Satzes zu denjenigen Existenzbeweisen gehört, welche das Ding, um dessen Existenz es sich handelt, nicht liefern, sondern ihre Beweiskraft einem Widerspruch verdanken, der aus der Annahme der Nicht-Existenz des betreffenden Dinges abgeleitet wird. Als weitere Beispiele derartiger Beweise seien erwähnt: a) der dritte Gauss'sche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra; b) der erste Hilbert'sche Beweis der Endlichkeit des Formensystems (Math. Ann. Bd. 36).

Ueber einen Schönflies'schen Satz der Theorie der stetigen Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

Von

F. Bernstein in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 16. März 1900.

Kürzlich hat Prof. Schönflies den folgenden Satz bewiesen[1]):

„Sind die beiden stetigen und eindeutigen Funktionen

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y)$$

„definiert auf der Fläche eines Quadrates (einschließlich des Um-„fangs) und entspricht in der durch sie vermittelten Abbildung „einem Bildpunkte ein und nur ein erzeugender Punkt, so liegen „die Bildpunkte des Quadrates nicht nur sämtlich innerhalb, oder „sämtlich außerhalb der Jordan'schen[2]) Curve ω, welche das „Bild der Begrenzung des Quadrats ist, sondern sie füllen auch „den durch die Curve ω begrenzten Teil der Bildebene „vollständig aus".

Hieraus wird dann der wichtige Schluß gezogen, daß x und y umgekehrt in dem betreffenden Bildgebiet eindeutige und stetige Funktionen von ξ und η sind.

Für diesen Satz soll im Folgenden ein neuer Beweis gegeben werden, der direkt zeigt, wie zu jedem Punkt des Bildgebietes der erzeugende Punkt des Quadrates bestimmt wird.

Der Grundgedanke des Nachweises ist der, daß bei einer Zer-

1) Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. Heft 3 S. 282.

2) Unter einer Jordan'schen Curve soll (nach Vorschlag von Prof. Osgood) eine Curve von solcher Eigenschaft verstanden werden, wie sie C. Jordan (Cours d'analyse sec. éd. pag. 90) zuerst untersucht hat.

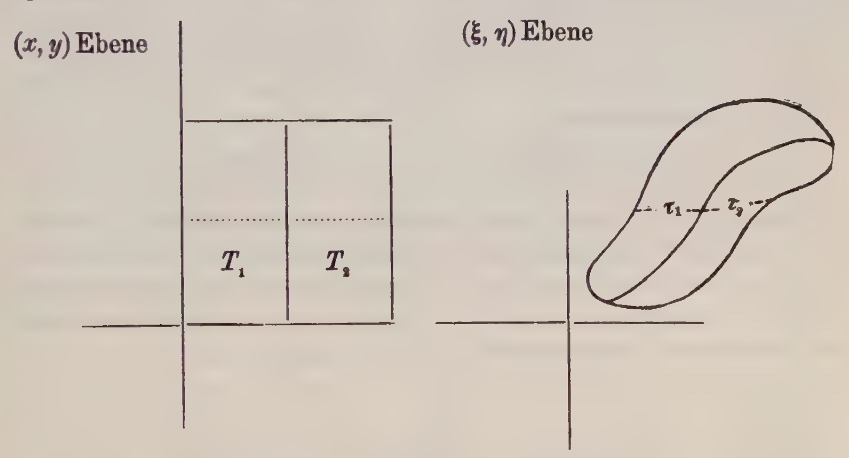
legung des Quadrates in ein Netz von Quadraten, das Bildgebiet ebenfalls in ein Netz von Gebieten zerlegt wird, und daß bei der Fortsetzung der Teilung hier, wie dort, einer lückenlosen Ueberdeckung des Gebietes durch das Netz zugestrebt wird.

Wir bedienen uns für den Beweis zweier Hilfssätze, welche Schönflies eingangs seiner Abhandlung genau beweist.

Hilfssatz 1. Die Bildpunkte des Quadrats liegen entweder sämtlich innerhalb oder sämtlich außerhalb der Curve ω.

Wir wollen für das Folgende stets annehmen, daß der erste Fall stattfindet, und eine solche Abbildung eine positive nennen.

Hilfssatz 2. Teilt man das Quadrat durch eine Strecke, welche zwei Punkte der Begrenzung verbindet, in zwei Teile T_1 und T_2, so teilt das Bild dieser Strecke das Innere von ω in zwei Teile τ_1 und τ_2, deren Begrenzungen, den Begrenzungen von T_1 und T_2 entsprechen mögen, und es erfahren die Gebiete T_1 und T_2 positive Abbildung. Es gehen mithin die Punkte von T_1 ganz in Punkte von τ_1 und die Punkte von T_2 ganz in Punkte von τ_2 über.



Aus diesem zweiten Hilfssatz leiten wir leicht einen etwas allgemeineren Satz ab. Bei einer Teilung des Quadrates durch eine weitere Strecke in 4 Teile, etwa in 4 Quadrate, ergiebt eine Uebertragung des Hilfssatzes 2. auf die Gebiete T_1, und T_2 der vorherigen Zweiteilung, daß auch das Innere von ω in 4 entsprechende Gebiete mit entsprechenden Begrenzungen zerfällt, und daß auch hier alle Gebiete positive Abbildung erfahren, also alles Ineinanderliegen von Gebieten erhalten bleibt. Das gleiche kann auch bei einer Zerlegung in $(2^2)^2$, $(2^3)^2$, ... Quadrate gefolgert werden, und wir erhalten für die allgemeine Teilung in $(2^n)^2$ Qua-

drate, wobei wir noch die Begrenzungen geeignet vergeben wollen, den Satz:

Hilfssatz 3. Zerlegt man das Quadrat in $(2^n)^2$ Quadrate, die wir in leicht verständlicher Weise mit $(k, l)_n$ bezeichnen, so wird

1) das Innere der Curve ω in $(2^n)^2$ entsprechende Teilgebiete $(\varkappa, \lambda)_n$ zerlegt, deren Begrenzungen die Bilder der Begrenzungen von $(k, l)_n$ sind.

2) erfahren alle Quadrate der Teilung positive Abbildung, d. h. liegt ein Punkt innerhalb

$$(k, l)_0, \quad (k, l)_1, \quad \ldots, \quad (k, l)_n$$

so liegt er auch innerhalb

$$(\varkappa, \lambda)_0, \quad (\varkappa, \lambda)_1, \quad \ldots, \quad (\varkappa, \lambda)_n$$

und außerhalb aller übrigen $(\varkappa, \lambda)$.

Betrachten wir nun irgend einen Punkt a des Hauptquadrates, so ist er definiert als der einzige Punkt, der zugleich im Innern der unendlich vielen Quadrate

$$(k, l)_0, \quad (k, l)_1, \quad (k, l)_2, \quad \ldots, (k, l)_n, \ldots$$

liegt.

Auch die Gebiete

$$(\varkappa, \lambda)_0, \quad (\varkappa, \lambda)_1, \quad (\varkappa, \lambda)_2, \quad \ldots, (\varkappa, \lambda)_n, \ldots$$

definieren, da sie nach Hilfssatz 3, 1) ineinanderliegen, mindestens einen Punkt, aber wie zu zeigen ist, auch nur einen Punkt, der im Innern aller liegt. Denn zieht man durch einen solchen Punkt α eine Grade, so schneidet jeder der beiden Halbstrahlen die sämtlichen Begrenzungen

$$(\varkappa, \lambda)_0, \quad (\varkappa, \lambda)_1, \quad \ldots (\varkappa, \lambda)_n,$$

in einer unendlichen Punktreihe. In diesen beiden Punktreihen ist jeder Punkt Bildpunkt. Und die Punkte deren Bilder sie sind, liegen auf den Begrenzungen von

$$(k, l)_0, \quad (k, l)_1, \quad \ldots (k, l)_n, \ldots$$

haben also den einzigen und gemeinsamen Grenzpunkt a. Infolgedessen gilt gleiches von den beiden Punktreihen. Da nun α beide Punktreihen auf derselben Graden trennt, so muß α der einzige und gemeinsame Grenzpunkt derselben sein. Es ist α das Bild von a und der einzige Punkt im Innern aller

$$(\varkappa, \lambda)_0, \quad (\varkappa, \lambda)_1, \quad \ldots (\varkappa, \lambda)_n, \ldots.$$

Nun wird der Beweis so geführt.

Ist α ein beliebiger Punkt des Bildgebietes, so liegt er gemäß Hilfssatz 3, 2 bei jeder Teilung im Innern einer einzigen $(\varkappa, \lambda)_n$, also im Innern der unendlichen Reihe von Gebieten

$$(\varkappa, \lambda)_0, \quad (\varkappa, \lambda)_1, \quad \ldots (\varkappa, \lambda)_n, \ldots$$

zugleich ist er der einzige Punkt dieser Art. Suchen wir jetzt denjenigen Punkt a auf, der im Innern der entsprechenden

$$(k, l)_0, \quad (k, l)_1, \quad \ldots (k, l)_n \ldots$$

liegt, so ist nach dem Vorangegangenen α das Bild von a.

Im Anschluß an den so eben geführten Beweis, soll ein zweiter Beweis gegeben werden, der etwas einfacher ist, dafür jedoch kein Verfahren liefert, die bei der Abbildung einander entsprechenden Punkte zu bestimmen.

Wir wollen nämlich darauf ausgehen, zu zeigen, daß thatsächlich jede stetige Linie der Bildebene, welche einen Bildpunkt mit einem Punkte, welcher nicht Bild ist, verbindet die Begrenzung ω schneidet. Es geht dann daraus unmittelbar hervor, daß die Bildpunkte den einen Teil, die andern Punkte, den zweiten der Teile erfüllen, in die die Bildcurve ω die Ebene zerlegt.

Im voraus bemerken wir, daß die Bildpunkte eine abgeschlossene Menge bilden, da die Abbildung durch stetige Funktionen bewirkt wird. Auf einer stetigen Linie L, welche von einem Bildpunkte zu einem Punkte p, der nicht Bild ist, hinführt, giebt er also stets einen Punkt α, der selbst noch Bildpunkt ist, zwischen dem und dem Punkte p aber auf der Linie kein Bildpunkt mehr liegt.

Es läßt sich dieser Punkt nicht mit einer geschlossenen aus Bildpunkten bestehenden Jordan'schen Curve umgeben, die ihn selbst einschließt, den Punkt p aber ausschließt. Denn aus der Existenz einer solchen Curve, welche durch L in einem Punkte α' geschnitten würde, der also Bildpunkt wäre und auf L zwischen α und p liegen würde, würde ein Widerspruch mit der Definition von α gefolgert werden. Diese Eigenschaft wird α als Punkt der Curve ω charakterisieren.

Indem wir gemäß dem Hilfssatz 1 annehmen, daß das Quadrat eine positive Abbildung erfährt, wollen wir einen Satz aufstellen, der dem Hilfssatz 2 der vorhergehenden Betrachtung entspricht und ganz ähnlich bewiesen wird.

Hilfssatz 4. Umgiebt man einen Punkt b des Quadrats,

der nicht auf der Begrenzung liegt, mit einem Kreise $K(b)$, dessen Punkte sämtlich dem Quadrat angehören, so gehen die Punkte desselben mittelst positiver Abbildung in ein Gebiet $\varkappa(\beta)$ über, welches von der Bildcurve der Kreislinie begrenzt wird, und zwar sinken bei hinreichender Verkleinerung von $K(b)$ die Entfernungen der Bildpunkte in $\varkappa(\beta)$ von β unter eine vorgegebene Größe. Das letztere folgt unmittelbar aus der Stetigkeit. Es folgt daraus, daß stets erreicht werden kann, daß ein bestimmter Punkt p der Bildebene außerhalb des Gebietes $\varkappa(\beta)$ liegt. Da die Abbildung positiv ist, so liegt β selbst innerhalb der Begrenzung von $\varkappa(\beta)$.

Läge nun der vorhin betrachtete Punkt α nicht auf der Curve ω, so wäre er das Bild eines Punktes a im Innern des Quadrates. Dann könnte also das Gebiet $\varkappa(\alpha)$ so bestimmt werden, daß p ein äußerer Punkt derselben wäre. Da die Begrenzung von $\varkappa(\alpha)$ aus Bildpunkten besteht, so gelangen wir auf die gekennzeichnete Weise zu einem Widerspruch.

Es ist also α ein Punkt der Curve ω, und es schneidet also eine stetige Linie, die einen Bildpunkt mit einem Punkt, der nicht Bild ist, verbindet, diese Curve.

Zum Schluß will ich bemerken, daß die hier geführten Beweise derart sind, daß dieselben, bei zweckmäßiger Verallgemeinerung des Begriffs der Jordan'schen Curve auf höhere Dimensionen, für beliebig viele Variabeln geführt werden können.

Ueber lineare Systeme von Kegelschnitten.

Von

H. E. Timerding in Straßburg.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 16. März 1900.

I.

In einem sehr interessanten Aufsatze Sur la résolution de l'équation du quatrième degré, der sich in Liouville's Journal de Mathématiques vom Jahre 1873 findet, hat Herr Darboux die Gleichung vierten Grades mit einer Unbekannten in der Weise behandelt, daß er sie auf zwei homogene quadratische Gleichungen:

$$\psi = 0, \qquad \varphi = 0$$

in drei Veränderlichen zurückführt, indem er annimmt:

(1) $$\psi = x_2^2 - 4x_1x_3,$$

(2) $$\varphi = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 + 2a_2x_1x_3 + 2a_3x_2x_3 + a_4x_3^2.$$

Der Gleichung $\psi = 0$ wird in der That auf die allgemeinste Weise genügt, indem man setzt:

$$x_1 : x_2 : x_3 = x^2 : 2x : 1,$$

dann aber geht die zweite Gleichung $\varphi = 0$ über in:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,$$

und dies ist die allgemeinste Form einer Gleichung vierten Grades.

Sieht man x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten in einer Ebene an, so stellen die Gleichungen $\psi = 0$ und $\varphi = 0$ zwei Kegelschnitte dar. Die Gleichung $\psi = 0$ des ersteren, den wir mit Herrn Franz Meyer (Apolarität und rationale Curven. Tübingen 1883) die Normcurve nennen wollen, ist auf ein

Tangentialdreieck bezogen, nämlich auf ein Dreieck, dessen Seiten aus zwei Tangenten des Kegelschnittes und ihrer Berührungssehne bestehen. Die Coefficienten in der Gleichung $\varphi = 0$ des zweiten Kegelschnittes, den wir als repräsentirenden Kegelschnitt bezeichnen wollen, sind nicht alle willkürlich, vielmehr ist der doppelte Coefficient von x_2^2 immer gleich dem einfachen Coefficienten von $x_1 x_3$, und diese Beziehung besagt, daß nach Herrn Reye's Ausdruck der Kegelschnitt als Curve zweiter Ordnung die Normcurve als Curve zweiter Classe stützt oder trägt und die letztere umgekehrt auf jenem ruht: dem repräsentirenden Kegelschnitte sind unendlich viele Poldreiecke der Normcurve einbeschrieben und der letzteren unendlich viele Poldreiecke jenes Kegelschnittes umschrieben.

Geht man von der Gleichung vierten Grades aus, so ist, wenn man die Normcurve mit ihrem Tangentialdreieck festlegt, der repräsentirende Kegelschnitt vollkommen bestimmt. Die Normcurve hat man sich aber fest zu denken, wie man auch die Coefficienten in der Gleichung vierten Grades wählt. Der repräsentirende Kegelschnitt gehört dann immer einem linearen Systeme von vier Dimensionen an. Dasselbe ist durch die Normcurve eben in der Weise bestimmt, daß alle in ihm enthaltenen Curven dieselbe tragen sollen.

Die Auflösung der Gleichung vierten Grades läuft nun darauf hinaus, das gemeinsame Poldreieck Π der beiden Kegelschnitte, des repräsentirenden und der Normcurve, zu bestimmen, oder, algebraisch gesprochen, durch eine lineare Transformation solche Variabeln einzuführen, in denen sich die beiden quadratischen Formen φ und ψ als bloße Quadratsummen ausdrücken.

Zu dem Zwecke sucht man in dem Büschel, das die beiden Kegelschnitte bestimmen, die zerfallenden Curven. Jede Curve des Büschels hat eine Gleichung von der Form:

(3) $$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

und die Werte des Parameters λ, die zu zerfallenden Curven gehören, sind aus der cubischen Gleichung zu bestimmen:

(4) $$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2\lambda \\ a_1 & a_2 + \lambda & a_3 \\ a_2 - 2\lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(5) $$4\lambda^3 - i\lambda - j = 0.$$

Hierin sind i und j die Invarianten der Binärform vierten

Grades, welche die Coefficienten a_μ hat, nämlich:

(6) $$i = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

(7) $$j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Die Coordinaten des Punktes, in dem sich die Linien eines der drei Linienpaare im Kegelschnittbüschel schneiden, genügen nun, wenn λ die zugehörige Wurzel der Gleichung (5) bezeichnet, den drei linearen Gleichungen:

(8) $$\begin{cases} a_0 x + a_1 x_2 + a x_3 = 2\lambda x_3, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = -\lambda x_2, \\ a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 = 2\lambda x_1. \end{cases}$$

Multipliziren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 und addiren, so finden wir:

(9) $$\varphi = \lambda(4 x_1 x_3 - x_2^2).$$

Setzen wir weiter:

(10) $$H = \lambda^2 (4 x_1 x_3 - x_2^2),$$

so haben wir aus den Gleichungen (8):

(11) $$H = (a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3^{\cdot})(a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3) - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2,$$

und indem wir (10) durch (9) dividiren:

(12) $$\lambda = \frac{H}{\varphi}.$$

In dieser Gleichung sind nach und nach die Coordinaten der drei Ecken des Poldreiecks Π einzusetzen, damit man die drei Wurzeln der Gleichung (5) erhalte.

Nun wird aber nach (11) allgemein:

$$H = u_1 u_3 - u_2^2,$$

wenn:

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad u_2 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad u_3 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Die Gleichung $H = 0$ stellt also den Kegelschnitt dar, dessen Punkte von den Tangenten der Normcurve die Pole für die repräsentirende Curve sind, derselbe ist die reziproke Polare der Normcurve bezüglich des repräsentirenden Kegelschnittes. Hieraus ist sofort klar, daß dieser Kegelschnitt $H = 0$, den wir der Kürze halber den Hesse'schen Kegelschnitt nennen wollen, die Normcurve in den Berührungspunkten derjenigen Tangenten

trifft, die auch Tangenten des repräsentirenden Kegelschnittes sind. Es ergiebt sich ferner unmittelbar der bekannte Satz, daß das gemeinsame Poldreieck Π der Normcurve und des repräsentirenden Kegelschnittes auch ein Poldreieck des Hesse'schen Kegelschnittes ist.

Wenn nun eine Curve aus einem durch zwei Kegelschnitte bestimmten Büschel durch eine Ecke des gemeinsamen Poldreiecks dieser beiden Kegelschnitte geht, so zerfällt sie notwendig in zwei gerade Linien, die sich in dieser Ecke des Poldreiecks schneiden. Es geht aber der Kegelschnitt:

$$H-\lambda\varphi = 0,$$

wo λ eine Wurzel der Gleichung (5) bezeichnet, wegen (12) durch eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes Π, er stellt also notwendig ein Linienpaar dar. Ist also:

$$\varphi+\lambda\psi = 0$$

eine zerfallende Curve, so zerfällt für denselben Wert des Parameters λ auch die Curve:

$$H-\lambda\varphi = 0$$

in zwei gerade Linien.

Sind nun λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung (5) und setzen wir:

$$(13) \qquad \begin{cases} \Theta_1 = H-\lambda_1\varphi, \\ \Theta_2 = H-\lambda_2\varphi, \\ \Theta_3 = H-\lambda_3\varphi, \end{cases}$$

so ist identisch:

$$(\lambda_2-\lambda_3)\,\Theta_1+(\lambda_3-\lambda_1)\,\Theta_2+(\lambda_1-\lambda_2)\,\Theta_3 = 0.$$

Wir können deswegen weiter setzen:

$$(14) \qquad \begin{cases} (\lambda_2-\lambda_3)\,\Theta_1 = \lambda_2 X_2^2-\lambda_3 X_3^2, \\ (\lambda_3-\lambda_1)\,\Theta_2 = \lambda_3 X_3^2-\lambda_1 X_1^2, \\ (\lambda_1-\lambda_2)\,\Theta_3 = \lambda_1 X_1^2-\lambda_2 X_2^2, \end{cases}$$

wo X_1, X_2, X_3 bestimmte lineare Funktionen der Punktcoordinaten sind. Weil:

$$(15) \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0,$$

ist nach (13):

$$3H = \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3.$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf (14):

$$(16) \qquad H = \frac{\lambda_1^2 X_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{\lambda_2^2 X_2^2}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{\lambda_3^2 X_3^2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

Wir machen nun:

$$(17)\qquad \begin{cases} X_1 = \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\,.\,\xi_1, \\ X_2 = \sqrt{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}\,.\,\xi_2, \\ X_3 = \sqrt{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\,.\,\xi_3, \end{cases}$$

dann wird:

$$(18)\qquad H = \lambda_1^2\xi_1^2+\lambda_2^2\xi_2^2+\lambda_3^2\xi_3^2,$$

ferner:

$$(19)\qquad \begin{cases} \Theta_1 = \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\xi_2^2+\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)\xi_3^2, \\ \Theta_2 = \lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)\xi_3^2+\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\xi_1^2, \\ \Theta_3 = \lambda_1(\lambda_1-\lambda_3)\xi_1^2+\lambda_2(\lambda_2-\lambda_3)\xi_2^2, \end{cases}$$

und:

$$\lambda_1\Theta_1+\lambda_2\Theta_2+\lambda_3\Theta_3 = -(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)(\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\lambda_3\xi_3^2).$$

Nun folgt aber aus (13) wegen (15):

$$\lambda_1\Theta_1+\lambda_2\Theta_2+\lambda_3\Theta_3 = -(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\,\varphi.$$

Also ist:

$$(20)\qquad \varphi = \lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\lambda_3\xi_3^2.$$

Dies und (18) sind die Gleichungen des repräsentirenden und des Hesse'schen Kegelschnittes, bezogen auf das Poldreieck Π. Bezeichnet man mit v_1, v_2, v_3 Liniencoordinaten, die auf dasselbe Poldreieck Π gehen, so erhält der letztere Kegelschnitt in diesen Coordinaten die Gleichung:

$$\frac{v_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{v_2^2}{\lambda_2^2}+\frac{v_3^2}{\lambda_3^2} = 0.$$

Macht man hierin:

$$(v_1, v_2, v_3) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3),$$

bringt also an die Stelle der Tangenten des Hesse'schen Kegelschnittes ihren Pol bezüglich des repräsentirenden Kegelschnittes, so genügen die Coordinaten dieses Pols der Gleichung:

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 0,$$

dies muß aber die Gleichung der Normcurve sein, denn diese ist ja in der That die reziproke Polare des Hesse'schen Kegelschnittes bezüglich der repräsentirenden Curve. So ergiebt sich, daß:

$$\psi = \varrho\,(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)$$

sein muß. Um den Faktor ϱ zu bestimmen, setze man $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$. Dann wird für diese Ecke des Poldreiecks wegen (20):

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\varrho}{\lambda_1}.$$

Andererseits ist aber für dieselbe Ecke:

$$\varphi+\lambda_1\psi = 0,$$

also $\varrho = -1$, und:

(21) $$\psi = -(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2).$$

Aus (18) und (20) finden wir:

$$H+\lambda_1\varphi = 2\lambda_1^2\xi_1^2-\lambda_2\lambda_3(\xi_2^2+\xi_3^2),$$
$$H+\lambda_2\varphi = 2\lambda_2^2\xi_2^2-\lambda_3\lambda_1(\xi_3^2+\xi_1^2),$$
$$H+\lambda_3\varphi = 2\lambda_3^2\xi_3^2-\lambda_1\lambda_2(\xi_1^2+\xi_2^2),$$

und mit Hinzuziehung von (21):

(22) $$\begin{cases} H+\lambda_1\varphi-\lambda_2\lambda_3\psi = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\xi_1^2 = X_1^2, \\ H+\lambda_2\varphi-\lambda_3\lambda_1\psi = (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)\xi_2^2 = X_2^2, \\ H+\lambda_3\varphi-\lambda_1\lambda_2\psi = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\xi_3^2 = X_3^2, \end{cases}$$

indem man wieder die Definitionsgleichungen (17) beachtet.

Aus den Gleichungen (22) folgt, indem wir sie paarweise subtrahiren:

(23) $$\begin{cases} (\lambda_2-\lambda_3)(\varphi+\lambda_1\psi) = X_2^2-X_3^2, \\ (\lambda_3-\lambda_1)(\varphi+\lambda_2\psi) = X_3^2-X_1^2, \\ (\lambda_1-\lambda_2)(\varphi+\lambda_3\psi) = X_1^2-X_2^2. \end{cases}$$

Sehen wir X_1, X_2, X_3 als neue Coordinaten an, so sind in diesen die vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte, des repräsentirenden und der Normcurve, aus je drei der linearen Gleichungen zu bestimmen:

$$X_2-X_3 = 0, \qquad X_2+X_3 = 0,$$
$$X_3-X_1 = 0, \qquad X_3+X_1 = 0,$$
$$X_1-X_2 = 0, \qquad X_1+X_2 = 0,$$

ihre Coordinaten sind also der Reihe nach:

$$(\ 1,\ \ 1,\ \ 1),$$
$$(-1,\ \ 1,\ \ 1),$$
$$(\ 1, -1,\ \ 1),$$
$$(\ 1,\ \ 1, -1),$$

und somit liegt in der Aufstellung dieses Coordinatensystems die vollständige Lösung des Problems, die vier Schnittpunkte, oder die vier Wurzeln der Gleichung vierten Grades, zu ermitteln.

II.

Nimmt man zu der Normcurve noch eine Curve zweiter Classe hinzu, so ruhen diese beiden Curven auf allen Kegelschnitten eines Complexes, d. h. eines linearen Systems dritter Stufe. Die Curven dieses Systems tragen dann sämtliche Kegelschnitte einer

Schar, die alle dieselben vier Tangenten gemeinsam haben. Nehmen wir die Gleichung irgend eines Kegelschnittes des Complexes in der Form an:

(1) $$p_0 x_1^2 + 2p_1 x_1 x_2 + p_2 x_2^2 + 2p_2 x_1 x_3 + 2p_3 x_2 x_3 + p_4 x_3^2 = 0,$$

und ist:

$$\Phi = 0,$$

wo:

(2) $$\Phi = \alpha_0 u_1^2 + 4\alpha_1 u_1 u_2 + 4\alpha_2 u_2^2 + 2\alpha_2 u_1 u_3 + 4\alpha_3 u_2 u_3 + \alpha_4 u_3^2$$

gesetzt sei, die Gleichung einer Curve zweiter Classe, die der Complexkegelschnitt außer der Normcurve stützen soll, so muß:

(3) $$\alpha_0 p_0 + 4\alpha_1 p_1 + 6\alpha_2 p_2 + 4\alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 = 0$$

sein. Die Gleichung der Curve zweiter Classe ist gleich in einer solchen Form angenommen worden, daß diese „Grundcurve" des Complexes ihrerseits auf der Normcurve:

(4) $$x_2^2 - 4x_1 x_3 = 0$$

ruht.

In dem Kegelschnittcomplexe sind nun vier doppelt zählende gerade Linien enthalten, und diese sind die gemeinsamen Tangenten der Grundcurve und Normcurve. In der Behandlung der Aufgabe, diese Doppellinien des Complexes zu bestimmen, würden wir also die vorigen Betrachtungen, nur in der reziproken Form, alle wiederholen. Statt:

$$\psi = x_2^2 - 4x_1 x_3$$

haben wir jetzt die Funktion:

$$\Psi = u_2^2 - u_1 u_3,$$

was eine leise Modification bedingt. Wir können aber alle Formeln mit den früheren völlig zur Deckung bringen, wenn wir

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \text{ durch } 2u_1,\ u_2,\ 2u_3$$

ersetzen. Es bedarf also keiner Erläuterung mehr, wie wir die Gleichungen der vier gemeinsamen Tangenten finden. Wir wollen sie, wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3 Coordinaten sind, die sich auf das gemeinsame Poldreieck der Grundcurve und Normcurve beziehen, in der Form annehmen:

(5) $$\mathfrak{X}_0 = 0,\quad \mathfrak{X}_1 = 0,\quad \mathfrak{X}_2 = 0,\quad \mathfrak{X}_3 = 0,$$

indem wir setzen:

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{X}_0 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ \mathfrak{X}_1 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \\ \mathfrak{X}_2 = -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \\ \mathfrak{X}_3 = -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3, \end{cases}$$

so daß identisch:

(7) $$\mathfrak{X}_0+\mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2+\mathfrak{X}_3 = 0$$

ist. Dann ist aber ein beliebiger Kegelschnitt des Complexes in der Form darstellbar:

(8) $$s_0\mathfrak{X}_0^2+s_1\mathfrak{X}_1^2+s_2\mathfrak{X}_2^2+s_3\mathfrak{X}_3^2 = 0.$$

In der That muß sich seine Gleichung aus den Gleichungen von vier Curven des Complexes, wofern dieselben nur keinem Netze angehören, linear zusammensetzen lassen, und als solche vier Curven kann man auch die vier Doppellinien wählen.

Wir wollen nun die Kegelschnitte des Complexes auf die Punkte des Raumes beziehen, so daß jedem Kegelschnitte ein Punkt, jedem Punkte ein Kegelschnitt zugeordnet ist, und zwar den Kegelschnitten eines Netzes immer die Punkte einer Ebene, den Kegelschnitten eines Büschels die Punkte einer geraden Linie entsprechen. Um dies zu erreichen, können wir die Größen p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 als lineare Funktionen beliebiger Punktcoordinaten im Raume ansehen, und die zwischen fünf solchen Funktionen immer bestehende lineare Relation ist in diesem Falle:

$$\alpha_0 p_0+4\alpha_1 p_1+6\alpha_2 p_2+4\alpha_3 p_3+\alpha_4 p_4 = 0.$$

Eine Curve des Complexes zerfällt in zwei gerade Linien, wenn:

(9) $$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Gleichung wird aber andererseits eine Fläche dritter Ordnung repräsentirt.

Die Bestimmung der vier Doppellinien des Complexes führt nun dazu, die p in bestimmter Weise als lineare Funktionen von vier Größen s_0, s_1, s_2, s_3 darzustellen, und diese letzteren wollen wir als die Coordinaten der Punkte im Raume ansehen.

Die Gleichung des Kegelschnittes:

(8) $$s_0\mathfrak{X}_0^2+s_1\mathfrak{X}_1^2+s_2\mathfrak{X}_2^2+s_3\mathfrak{X}_3^2 = 0$$

geht, wenn wir die Coordinaten ξ einführen, über in:

(10) $$S_0(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+2S_1\xi_2\xi_3+2S_2\xi_3\xi_1+2S_3\xi_1\xi_2 = 0,$$

indem wir setzen:

(11) $$\begin{cases} 2S_0 = s_0+s_1+s_2+s_3, \\ 2S_1 = s_0+s_1-s_2-s_3, \\ 2S_2 = s_0-s_1+s_2-s_3, \\ 2S_3 = s_0-s_1-s_2+s_3. \end{cases}$$

Die Bedingung dafür, daß der Kegelschnitt in zwei gerade Linien zerfällt, ist das Zusammenbestehen der drei Gleichungen:

$$\begin{cases} S_0\xi_1 + S_3\xi_2 + S_2\xi_3 = 0, \\ S_3\xi_1 + S_0\xi_2 + S_1\xi_3 = 0, \\ S_2\xi_1 + S_1\xi_2 + S_0\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Die Lösungen ξ_1, ξ_2, ξ_3 derselben geben die Coordinaten des Punktes, in dem sich die Linien des Linienpaares durchschneiden. Führen wir aber die Ausdrücke $\mathfrak{X}$ ein, so schreiben sich diese Gleichungen:

$$\begin{cases} s_0\mathfrak{X}_0 + s_1\mathfrak{X}_1 - s_2\mathfrak{X}_2 - s_3\mathfrak{X}_3 = 0, \\ s_0\mathfrak{X}_0 - s_1\mathfrak{X}_1 + s_2\mathfrak{X}_2 - s_3\mathfrak{X}_3 = 0, \\ s_0\mathfrak{X}_0 - s_1\mathfrak{X}_1 - s_2\mathfrak{X}_2 + s_3\mathfrak{X}_3 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

(12) $$s_0\mathfrak{X}_0 = s_1\mathfrak{X}_1 = s_2\mathfrak{X}_2 = s_3\mathfrak{X}_3,$$

und setzen wir die so sich ergebenden Werte in die identische Relation:

$$\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 = 0$$

ein, so wird sie:

(13) $$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 0.$$

Dies ist also in den Coordinaten s die einfache Gleichung der Fläche dritter Ordnung, deren Punkte zerfallenden Kegelschnitten des Complexes entsprechen.

Die Form der Gleichung zeigt sofort, daß die Fläche alle Kanten des Coordinatentetraeders enthält und in jedem Eckpunkte desselben einen Knotenpunkt besitzt. Diese vier Eckpunkte entsprechen den vier Doppellinien, die Kanten aber solchen Büscheln des Complexes, die aus lauter Linienpaaren bestehen. Die Schnittpunkte dieser Linienpaare fallen alle in einen „Hauptpunkt" zusammen, die Linienpaare gehören einem Strahlbüschel an und begründen in demselben eine Involution.

Da mit jedem Strahlenpaare auch ein Punkt eindeutig bestimmt ist, nämlich der Schnittpunkt der beiden Strahlen, so ist die Fläche dritter Ordnung, deren Punkten lauter Linienpaare entsprechen, ebenfalls punktweise eindeutig auf die Kegelschnittebene bezogen. Auch jedem Punkte dieser Ebene ist nur ein Punkt der Fläche zugeordnet, denn in dem ersteren schneiden sich nur die Linien eines Linienpaares des Complexes. Ausgenommen sind hiervon nur die sechs Hauptpunkte, die in der oben angegebenen Weise den Grundpunkt eines Büschels von Linienpaaren bilden und allen Punkten einer geraden Linie auf der

Fläche dritter Ordnung, nämlich einer Kante des Coordinatentetraeders, entsprechen.

Hingegen sind den vier Knotenpunkten der Fläche in der Ebene alle Punkte je einer geraden Linie zugeordnet, nämlich einer Doppellinie des Complexes. Wenn die Linien eines Linienpaares zusammenfallen, wird natürlich ihr Schnittpunkt unbestimmt und kann auf der doppelt zählenden Geraden beliebig angenommen werden. Die sechs Hauptpunkte sind die Ecken des von den Doppellinien gebildeten Vierseits. In der That bilden je zwei Linien, die durch den Schnittpunkt zweier dieser Doppellinien gehen und dieselben harmonisch trennen, ein Linienpaar, das dem Complexe angehört. Jedes dieser Linienpaare hat eine Gleichung von der Form:

$$s_i \mathfrak{X}_i^2 + s_j \mathfrak{X}_j^2 = 0,$$

woraus man sofort sieht, daß sein entsprechender Flächenpunkt auf einer Kante des Coordinatentetraeders liegt.

Die Coordinaten ξ sind auf das Diagonaldreieck des Vierseits bezogen. Es bildet aber jeder Strahl durch eine Ecke dieses Diagonaldreiecks zusammen mit der gegenüberliegenden Seite immer eine zerfallende Curve des Complexes, so daß wir noch drei Büschel solcher zerfallender Curven erhalten. Die Gleichung einer derselben hat eine der folgenden drei Formen:

$$(S_2 \xi_2 + S_3 \xi_3)\xi_1 = 0,$$
$$(S_3 \xi_3 + S_1 \xi_1)\xi_2 = 0,$$
$$(S_1 \xi_1 + S_2 \xi_2)\xi_3 = 0.$$

Es ist also für sie immer:

$$S_0 = 0$$

oder:

(14) $$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Ebene, welche die Fläche dritter Ordnung in den drei, diesen drei Büscheln von Linienpaaren entsprechenden, geraden Linien schneiden muß, und zwar verbindet jede dieser geraden Linien die Schnittpunkte zweier Gegenkanten des Coordinatentetraeders mit der Ebene.

Aus der Gleichung dieser Ebene geht die Gleichung der Fläche dritter Ordnung hervor, indem man die Coordinaten durch ihre reziproken Werte ersetzt. Auf diese Art ist die Fläche aber gleichzeitig eindeutig auf die Ebene bezogen, und diese Beziehung ist keine andere als die, in der sie zu der Ebene der Kegelschnitte steht. In der That legen die Größen $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, die ihrerseits der Beziehung:

$$\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 = 0$$

Genüge leisten, wenn man sie als Coordinaten in demselben Systeme wie die s ansieht, die einzelnen Punkte jener Ebene fest, mit ihnen sind aber die Coordinaten des zugehörigen Punktes auf der Fläche dritter Ordnung durch die Relation verbunden:

$$s_0 \mathfrak{X}_0 = s_1 \mathfrak{X}_1 = s_2 \mathfrak{X}_2 = s_3 \mathfrak{X}_3,$$

also ihren reziproken Werten proportional. —

Die Kegelschnitte des Complexes, die auf einem ganz beliebigen Kegelschnitte der Ebene ruhen, bilden ein quadratisches Netz. Die Gleichung des Kegelschnittes:

$$S_0(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+2S_1\xi_2\xi_3+2S_2\xi_3\xi_1+2S_3\xi_1\xi_2 = 0$$

in Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 lautet nämlich:

$$(15)\begin{cases} (S_0^2-S_1^2)u_1^2+(S_0^2-S_2^2)u_2^2+(S_0^2-S_3^2)u_3^2 \\ +2(S_2S_3-S_0S_1)u_2u_3+2(S_3S_1-S_0S_2)u_3u_1+2(S_1S_2-S_0S_3)u_1u_2 = 0, \end{cases}$$

und diese Curve zweiter Classe ruht auf der Curve zweiter Ordnung:

$$(16)\quad u_{11}\xi_1^2+u_{22}\xi_2^2+u_{33}\xi_3^2+2u_{23}\xi_2\xi_3+2u_{31}\xi_3\xi_1+2u_{12}\xi_1\xi_2 = 0,$$

wenn:

$$(17)\begin{cases} u_{11}(S_0^2-S_1^2)+u_{22}(S_0^2-S_2^2)+u_{33}(S_0^2-S_3^2) \\ +2u_{23}(S_2S_3-S_0S_1)+2u_{31}(S_3S_1-S_0S_2)+2u_{12}(S_1S_2-S_0S_3) = 0 \end{cases}$$

ist. Führt man für die S ihre Werte (11) ein, so geht diese Gleichung über in:

$$(18)\quad\begin{cases} u_{11}(s_0+s_1)(s_2+s_3)+2u_{23}(s_2s_3-s_0s_1) \\ +u_{22}(s_0+s_2)(s_3+s_1)+2u_{31}(s_3s_1-s_0s_2) \\ +u_{33}(s_0+s_3)(s_1+s_2)+2u_{12}(s_1s_2-s_0s_3) = 0 \end{cases}$$

oder:

$$(19)\quad\begin{cases} (u_{22}+u_{33}-2u_{23})s_0s_1+(u_{22}+u_{33}+2u_{23})s_2s_3 \\ +(u_{33}+u_{11}-2u_{31})s_0s_2+(u_{33}+u_{11}+2u_{31})s_3s_1 \\ +(u_{11}+u_{22}-2u_{12})s_0s_3+(u_{11}+u_{22}+2u_{12})s_1s_2 = 0. \end{cases}$$

Faßt man die s wieder als Punktcoordinaten im Raume auf, so stellt diese Gleichung eine Fläche zweiter Ordnung dar, die dem Coordinatentetraeder umschrieben ist, und die Gesamtheit der Kegelschnitte in der Ebene ist so eindeutig auf die Gesamtheit der dem Fundamentaltetraeder umschriebenen Flächen zweiter Ordnung bezogen.

Setzt man in der Gleichung (16):

$$(a)\quad u_{11}=u_1^2,\ u_{22}=u_2^2,\ u_{33}=u_3^2,\ u_{23}=u_2u_3,\ u_{31}=u_3u_1,\ u_{12}=u_1u_2,$$

so geht der Kegelschnitt in eine doppelt gezählte gerade Linie über, und die Gleichung (19) stellt dann das quadratische Netz

derjenigen Kegelschnitte im Complexe dar, die diese gerade Linie berühren. Die zugehörige quadratische Fläche ist ein Kegel, und für die Coordinaten der Spitze desselben finden wir nach einer leichten Rechnung die Werte:

$$(20)\quad \begin{cases} (s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = \\ \left(-1, \frac{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}{(u_1+u_2)(u_1+u_3)}, \frac{(u_2-u_3)(u_2-u_1)}{(u_2+u_3)(u_2+u_1)}, \frac{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}{(u_3+u_1)(u_3+u_2)}\right). \end{cases}$$

Nun ist aber identisch:

$$-1 + \frac{(u_1+u_2)(u_1+u_3)}{(u_1-u_2)(u_1-u_3)} + \frac{(u_2+u_3)(u_2+u_1)}{(u_2-u_3)(u_2-u_1)} + \frac{(u_3+u_1)(u_3+u_2)}{(u_3-u_1)(u_3-u_2)} = 0,$$

also wird wieder:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 0.$$

Die Spitze aller Kegel, die auf die angegebenen Weise zu den (doppelt gezählten) geraden Linien der Kegelschnittebene gehören, bilden wieder unsere Fläche dritter Ordnung, die wir als Discriminantenfläche bezeichnen könnten. Dies ist auch geometrisch evident, denn die Spitze des Kegels entspricht einem Linienpaar, von dem eine Linie die gegebene Gerade ist, während die andere von den Polen dieser Geraden bezüglich aller Curven der Schar erfüllt wird, die auf sämtlichen Kegelschnitten des Complexes ruht.

Fragen wir nun weiter, welche Flächen den Kegelschnitten dieser Schar selbst entsprechen, so ist zu beachten, daß, indem wir:

$$(21)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

voraussetzen, eine beliebige Curve der Schar in der Form darstellbar ist:

$$(22)\qquad \frac{\xi_1^2}{\lambda_1} + \frac{\xi_2^2}{\lambda_2} + \frac{\xi_3^2}{\lambda_3} = 0.$$

Wir haben also in der Flächengleichung (19):

$$(b)\quad u_{11} = \frac{1}{\lambda_1},\ u_{22} = \frac{1}{\lambda_2},\ u_{33} = \frac{1}{\lambda_3},\ u_{23} = 0,\ u_{31} = 0,\ u_{12} = 0$$

zu setzen, und finden nach einigen Reductionen:

$$(23)\qquad \lambda_1^2(s_0 s_1 + s_2 s_3) + \lambda_2^2(s_0 s_2 + s_3 s_1) + \lambda_3^2(s_0 s_3 + s_1 s_2) = 0.$$

Wenn wir λ_1, λ_2, λ_3 beliebig variiren lassen, so erhalten wir die sämtlichen Flächen zweiter Ordnung, für deren entsprechende Kegelschnitte das Fundamentaldreieck ein Poldreieck ist. Insbe-

sondere entsprechen den Kegelschnitten:

$$(24)\qquad \begin{cases} -\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 0, \\ \xi_1^2-\xi_2^2+\xi_3^2 = 0, \\ \xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2 = 0 \end{cases}$$

die Flächen:

$$(25)\qquad \begin{cases} s_0 s_1 + s_2 s_3 = 0, \\ s_0 s_2 + s_3 s_1 = 0, \\ s_0 s_3 + s_1 s_2 = 0. \end{cases}$$

Dieselben enthalten je vier Kanten des Coordinatentetraeders und schneiden die Discriminantenfläche außerdem in je einem Kegelschnitte.

Besonders zu beachten sind noch die Flächen zweiter Ordnung, die Kegelschnitten des Complexes selbst entsprechen. Dann haben wir zu setzen:

$$(c)\quad u_{11} = u_{22} = u_{33} = T_0,\quad u_{23} = T_1,\quad u_{31} = T_2,\quad u_{12} = T_3,$$

und finden die Flächengleichung:

$$(26)\qquad \begin{cases} (T_0-T_1)s_0 s_1 + (T_0-T_2)s_0 s_2 + (T_0-T_3)s_0 s_3 \\ +(T_2-T_3)s_2 s_3 + (T_3-T_1)s_3 s_1 + (T_1-T_2)s_1 s_2 = 0. \end{cases}$$

Nun ist aber:

$$(27)\qquad \begin{cases} 2T_0 = t_0+t_1+t_2+t_3, \\ 2T_1 = t_0+t_1-t_2-t_3, \\ 2T_2 = t_0-t_1+t_2-t_3, \\ 2T_3 = t_0-t_1-t_2+t_3, \end{cases}$$

wenn t_0, t_1, t_2, t_3 die Coordinaten des dem Complexkegelschnitte entsprechenden Raumpunktes sind. Nach Einführung dieser Werte geht die Flächengleichung über in:

$$(28)\qquad \begin{cases} (t_2+t_3)s_0 s_1 + (t_3+t_1)s_0 s_2 + (t_1+t_2)s_0 s_3 \\ +(t_0+t_1)s_2 s_3 + (t_0+t_2)s_3 s_1 + (t_0+t_3)s_1 s_2 = 0, \end{cases}$$

und aus dieser Form ist sofort ersichtlich, daß sie die erste Polare des den Kegelschnitt repräsentirenden Raumpunktes für die Discriminantenfläche darstellt.

Auf den Curven eines beliebigen Netzes in dem Kegelschnittcomplexe ruhen im Allgemeinen vier andere Curven dieses Complexes. Dem Netze entspricht im Raume eine Ebene, die für die Discriminantenfläche die zweite Polare der jene vier Kegelschnitte repräsentirenden Raumpunkte ist.

Die tetraedrale cubische Punkttransformation, welche dadurch ausgedrückt wird, daß man die Coordinaten eines Punktes durch

ihre reziproken Werte ersetzt, führt jede Fläche zweiter Ordnung, die dem Fundamentaltetraeder umschrieben ist, wieder in eine ebensolche Fläche über. Fragen wir, wie die zugehörigen Kegelschnitte in der Ebene sich entsprechen, so sehen wir sofort, daß auf diese Weise die Curve:

$$u_{11}x_1^2 + u_{22}x_2^2 + u_{33}x_3^2 + 2u_{23}x_2x_3 + 2u_{31}x_3x_1 + 2u_{12}x_1x_2 = 0$$

in die Curve:

$$u_{11}x_1^2 + u_{22}x_2^2 + u_{33}x_3^2 - 2u_{23}x_2x_3 - 2u_{31}x_3x_1 - 2u_{12}x_1x_2 = 0$$

übergeht. Diese einfache lineare Beziehung, welche übrigens durch keine Punkttransformation zu erreichen ist, wollen wir als die Hauptverwandtschaft zwischen den Kegelschnitten der Ebene bezeichnen.

Es giebt nun vierfach unendlich viele Netze von Kegelschnitten, auf denen ein Büschel von Kegelschnitten des Complexes ruht. Ein jedes dieser Netze besteht aus den Kegelschnitten, die dem gemeinsamen Poldreiecke zweier Curven des Complexes umschrieben sind. Die zu den Kegelschnitten des Netzes gehörigen Flächen zweiter Ordnung haben dann immer alle eine gerade Linie gemein. Haben zwei Flächen zweiter Ordnung aber eine gerade Linie gemein, so schneiden sie sich außerdem in einer cubischen Raumcurve. In unserem Falle entsprechen den Punkten einer solchen cubischen Raumcurve die Kegelschnitte einer cubischen Schar in dem Complexe, die ihrerseits die Eigenschaft haben auf allen Kegelschnitten eines Netzes zu ruhen.

Wenn also von den vier Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels drei die Ecken des gemeinsamen Poldreiecks zweier dem Complexe angehörender Curven sind, so ruhen außer dem Büschel, das diese beiden Complexcurven bestimmen, alle Kegelschnitte einer cubischen Schar in dem Complexe auf jenem Kegelschnittbüschel, und das letztere gehört einem Kegelschnittnetze an, auf dessen sämtlichen Curven die cubische Schar ruht und welches die besondere Eigenschaft hat, daß unter den vier Schnittpunkten zweier beliebiger Curven in ihm immer die Ecken des gemeinsamen Poldreiecks eines Büschels von Kegelschnitten in dem Complexe enthalten sind.

Ein derartiges Netz entspricht immer in der Hauptverwandtschaft einem anderem Netze, dessen sämtliche Curven einem solchen gemeinsamen Poldreiecke umschrieben sind.

Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelasticität.

Referat für den internationalen physikalischen Congreß in Paris vom 6. bis 12. August 1900

erstattet von

W. Voigt.

Vorgelegt am 9. April 1900.

Einleitung.

1) **Aufgabe und Disposition des Referates.** Die Organisations-Commission des internationalen physikalischen Congresses in Paris hat den Verfasser um ein Referat über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der Krystallelasticität ersucht und dabei den Wunsch geäußert, daß der Bericht neben einer Aufzählung der neueren theoretischen und experimentellen Resultate auch allgemeine Gesichtspunkte über die Verwerthung der Symmetrieverhältnisse in der Krystallphysik enthalten und Vorschläge für eine einheitliche Nomenclatur im Gebiete der Elasticitätslehre bringen möchte.

Eine solche Aufforderung, kommend aus dem Lande, in dem die allgemeine Theorie der Elasticität begründet und die experimentelle Erforschung der Elasticitätsverhältnisse der Krystalle durch eine zu drei Malen von der ersten wissenschaftlichen Körperschaft gestellte Preisaufgabe als ein Problem von hervorragender Wichtigkeit characterisirt worden ist[1]), konnte dem Verfasser, der einen Theil seiner Lebensarbeit jenem Gebiete gewidmet hat, nur ehrenvoll und erfreulich sein.

Die nachstehende Darstellung, durch die er dem geäußerten Wunsche gerecht zu werden versucht, zerfällt in sechs Theile,

denen einige allgemeine Bemerkungen über wissenschaftliche Nomenclatur vorausgeschickt sind.

Der erste Theil beschäftigt sich, einer von der Commission dem Verfasser ausdrücklich gegebenen Anregung folgend, mit den allgemeinen Eigenschaften jener speciellen gerichteten Größen, die in der Elasticitätslehre eine so große Rolle spielen und die von dem Verfasser als Tensoren den verwandten Vectoren gegenübergestellt werden. Bei der Darstellung ist das Hauptgewicht auf die für das Weitere unmittelbar bedeutungsvollen Eigenschaften gelegt; doch fehlt es nicht an Hinweisen auf das Vorkommen der Tensoren in anderen Gebieten der Physik.

Der zweite Theil setzt die Methoden auseinander, die bei der Entwickelung der Elasticitätstheorie benutzt worden sind (Fern- und Nahwirkungshypothesen) und wendet sich dann der Darstellung der allgemeinen Eigenschaften der Druckcomponenten in deformirbaren Körpern zu.

Der dritte Theil berichtet über die Ableitung der Beziehungen zwischen Drucken und Deformationen in elastischen Körpern unter besonderer Bezugnahme auf die Drehungen der Moleküle gegen die Volumenelemente. Er führt zwei Systeme elastischer Parameter (Constanten und Moduln) ein und zeigt ihr Verhalten bei Coordinatentransformationen.

Der vierte Theil bespricht die allgemeinen Grundsätze für die Anwendung der krystallographischen Symmetrieelemente in der Krystallphysik und benutzt sie für die Specialisirung verschiedener in der Elasticitätstheorie auftretender scalarer Functionen, insbesondere des elastischen Potentiales.

Der fünfte Theil beginnt mit der Aufzählung der Fragen, die durch die Bestimmung elastischer Parameter an Krystallen beantwortet werden können, und schließt daran eine Zusammenstellung der für die Berechnung von Beobachtungen nöthigen Formeln.

Der sechste Theil enthält eine Uebersicht über die auf Krystallelasticität bezüglichen Beobachtungen und eine Verwerthung derselben zur Erklärung gewisser lange umstrittener Beobachtungsthatsachen aus dem Gebiet der Elasticität isotroper Körper.

In einem Anhang werden die Gesetze der Thermoelasticität besprochen.

Den Schluß jedes Theiles bildet eine kleine Anzahl von Leitsätzen oder Thesen, welche bestimmt sind, die wichtigsten angeregten oder gelösten Fragen des betreffenden Abschnittes übersichtlich zusammenzufassen.

2) **Wissenschaftliche Nomenclatur.** Gebiete, in denen vor Ent-

wickelung der allgemeinen Theorie specielle Probleme eingehend studirt worden sind, werden im Allgemeinen einer systematischen Nomenclatur entbehren. Die Elasticitätslehre, in der die Fälle der Längsdehnung, der Biegung, der allseitigen Compression schon frühzeitig beobachtet sind, bietet hierfür ein auffallendes Beispiel. Insbesondere sind die alten Namen ihrer einfachsten Parameter (Elasticitätscoefficient, Elasticitätsmodul) wenig characteristisch und werden keineswegs von allen Autoren gleichmäßig angewendet. Auch auf die Unbestimmtheit des Begriffes „großer oder hoher Elasticität", der ebensowohl nach der Seite großer, wie kleiner Deformirbarkeit aufgefaßt werden kann, darf hingewiesen werden.

Das Bedürfniß nach einer Reform ist demgemäß seit langer Zeit empfunden worden und hat für den Fall der isotropen Körper eine Reihe von neuen Namen veranlaßt[2]), die einen wesentlichen Fortschritt bedeuten, aber doch zumeist zu speciell gefaßt sind, um eine Uebertragung auf den Fall der Krystalle zu gestatten. Dem gegenüber hat der Referent seit vielen Jahren eine Nomenclatur für die Parameter speciell der Krystallelasticität benutzt, die eine Uebertragung auf isotrope Körper unmittelbar gestattet und die, wie es scheint, in Deutschland allmählig allgemeineren Eingang findet. —

Termini technici sollten nach des Referenten Ansicht entweder einer neutralen alten Sprache entnommen sein, oder kraft ihrer Deutlichkeit eine leichte Uebersetzung gestatten. Die Kürze kommt hierneben erst in zweiter Linie in Betracht.

Diese Regel ist bisher in der That fast ausnahmslos befolgt worden, und die auffallende Ausnahme der letzten Decennien, der von England aus verbreitete „curl", bestätigt sie anscheinend. Der Name hat eben nur den Vorzug der Kürze, entspricht aber dem Wesen der Sache viel weniger, als das lateinische vortex (Wirbelstärke), dessen Bedeutung seit 30 Jahren feststeht, und das als Symbol in der abgekürzten Form „vort" ebensowohl benutzbar wäre, wie „cos" für cosinus.

Wie wenig die Länge des Namens seiner Verbreitung hinderlich ist, zeigen recht überzeugend die von Maxwell eingeführten magnetischen und electrischen Permeabilitäten. Obwohl diese Namen an eine ganz specielle Deutung der Beobachtungen anknüpfen und besonders umständlich sind, haben sie sich durch die ihnen eigene Anschaulichkeit schnell eingebürgert.

Die vom Referenten für die Nomenclatur der Elasticitätstheorie zu machenden Vorschläge werden weiter unten auseinan-

dergesetzt werden. Hier im Eingang möge nur betont werden, daß die betreffenden Namen, als zunächst den Aufgaben der Krystallelasticität angepaßt, sehr allgemein gehalten sind. Es ist deshalb mit ihnen eine Vereinfachung und Modification der Bezeichnungen für den Fall isotroper Körper sehr wohl vereinbar. Nur sollten dabei im Interesse der Einheitlichkeit nach Möglichkeit Grundsätze angewandt werden, welche die isotropen Körper nicht zu scharf von den Krystallen trennen.

I. Ueber Tensoren und Tensortripel [3]).

3) **Tensoren.** In der Elasticitätslehre spielt neben Scalaren und Vectoren noch eine dritte Gattung physikalischer Functionen eine große Rolle, die bisher fast stets den Vectoren zugerechnet worden ist, obgleich sie ganz verschiedene Eigenschaften besitzt. Das beiden einzig Gemeinsame, nämlich der Umstand, daß beide Functionsgattungen durch eine Zahlgröße und eine Richtung characterisirt sind, erweist sich bei genauerer Betrachtung als nicht durchschlagend. In der That hat jene Richtung bei beiden Größenarten einen ganz verschiedenen Character; sie besitzt zwei verschiedenwerthige Seiten bei den Vectoren, zwei gleichwerthige bei jenen neuen Größen, und dies bedingt wesentliche Verschiedenheiten ihres analytischen Verhaltens.

Referent hat für diese Functionen den Namen Tensoren vorgeschlagen, der ebenso, wie der der Vectoren, von einem einfachen und anschaulichen Beispiel (der einfachen Dehnung eines Volumens) abgeleitet ist; derselbe soll auch hier benutzt werden.

Da die Anzahl der Bestimmungsstücke eines Tensors T dieselbe ist, wie die eines Vectors V, nämlich drei, so wird man auch seine Größe und Richtung symmetrisch durch Componenten nach den Coordinatenaxen auszudrücken suchen. Aber während bei dem Vector die einfachen Projectionen auf diese Richtungen

1) $F = V\cos(V, X),\ G = V\cos(V, Y),\ H = V\cos(V, Z)$

zu diesem Zwecke sich boten, sind dieselben für einen Tensor nicht anwendbar; denn diese Projectionen, die bei einem gleichzeitigen Wechsel des Vorzeichens und der Richtung von V ungeändert bleiben, entsprechen gerade jener Einseitigkeit des Vectors, welche ihn vom Tensor unterscheidet.

Die Zweiseitigkeit des Tensors gewinnt dagegen gleichmäßig in zwei verschiedenen Arten von Functionen Ausdruck, die als Componenten nach den Coordinatenaxen bezeichnet werden können, da eine jede von ihnen eine Axe in ausgezeichneter Weise einführt.

Als Componenten erster Art bezeichnen wir die Ausdrücke

2) $A = T\cos^2(T, X), \quad B = T\cos^2(T, Y), \quad C = T\cos^2(T, Z).$

Sie bestimmen die Größe von T durch die Formel

3) $$T = A + B + C$$

vollständig, seine Richtung durch

4) $$\cos^2(T, X) = \frac{A}{T}, \ \cos^2(T, Y) = \frac{B}{T}, \ \cos^2(T, Z) = \frac{C}{T}$$

nur unvollständig, insofern der Octant unbestimmt bleibt, in dem T liegt.

Als Componenten zweiter Art bezeichnen wir die Ausdrücke

5) $$A' = T\cos(T, Y)\cos(T, Z), \quad B' = T\cos(T, Z)\cos(T, X),$$
$$C' = T\cos(T, X)\cos(T, Y).$$

Sie bestimmen die Größe von T durch die Formel

6) $$T = \frac{B'C'}{A'} + \frac{C'A'}{B'} + \frac{A'B'}{C'}$$

vollständig, ausgenommen in den Fällen, daß T in einer Coordinatenaxe liegt, wo der Ausdruck unbestimmt wird; die Richtung von T ist dagegen durch die Formeln

7) $$\cos(T, X) : \cos(T, Y) : \cos(T, Z) = \frac{1}{A'} : \frac{1}{B'} : \frac{1}{C'}$$

stets vollständig bestimmt.

Da drei Stücke zur Bestimmung des Tensors ausreichen, so sind natürlich die beiden Componentenarten von einander abhängig; in der That gilt

8) $$A'^2 = BC, \quad B'^2 = CA, \quad C'^2 = AB,$$

9) $$A = \frac{B'C'}{A'}, \quad B = \frac{C'A'}{B'}, \quad C = \frac{A'B'}{C'}.$$

Für bestimmte Lagen des Coordinatensystemes wird je eine Componente erster Art mit dem Tensor selbst identisch, niemals aber eine Componente zweiter Art. Die Componenten erster Art erweisen sich hierdurch dem Tensor selbst gleichartig, die zweiter Art ihm verschiedenartig.

Vectorgrößen können durch geeignete Wahl der als positiv zu rechnenden Seite ihrer Richtung stets positiv gemacht werden; Tensoren sind bald positiv, bald negativ. Die Componenten A, B, C haben stets das Vorzeichen von T selbst, die A', B', C' können das gleiche oder das entgegengesetzte haben.

Setzt man T je nach seinem Vorzeichen gleich $\pm V^2$ und legt V eine der beiden Richtungen von T bei, so stellen sich die Componenten A, B, C als die Quadrate, die A', B', C' als die Producte der Vectorcomponenten F, G, H von V dar. Die Tensorcomponenten erster Art transformiren sich hiernach wie die Quadrate, die zweiter Art wie die Producte von Vectorcomponenten.

4) **Tensortripel.** In der Natur kommen die Tensoren hauptsächlich in Combinationen zu drei mit zu einander normalen Richtungen, aber mit von einander unabhängigen Größen vor. Wir nennen solche Systeme Tensortripel und bezeichnen sie durch T_1, T_2, T_3.

Ein Tensortripel ist nach Lage und Größe vollständig und symmetrisch bestimmt durch die sechs Summen paralleler und gleichartiger Componenten der einzelnen Tensoren

10) $$A = \sum A_h, \quad B = \sum B_h, \quad C = \sum C_h,$$

11) $$A' = \sum A'_h, \quad B' = \sum B'_h, \quad C' = \sum C'_h, \quad h = 1, 2, 3.$$

Zum Beweis betrachten wir den Tensor

12) $$\Theta = A\cos^2(\Theta, X) + B\cos^2(\Theta, Y) + C\cos^2(\Theta, Z)$$
$$+ 2A'\cos(\Theta, Y)\cos(\Theta, Z) + 2B'\cos(\Theta, Z)\cos(\Theta, X) + 2C'\cos(\Theta, X)\cos(\Theta, Y),$$

der sich den A, B, C gleichartig erweist, insofern er bei bestimmten Richtungen Θ mit ihnen identisch wird. Ersetzen wir hier links Θ durch $1/\varrho^2$, wobei ϱ eine auf den beiden Richtungen von Θ aufgetragene Strecke bedeutet, so stellt

13) $$\frac{1}{\varrho^2} = A\cos^2(\varrho, X) + B\cos^2(\varrho, Y) + C\cos^2(\varrho, Z)$$
$$+ 2A'\cos(\varrho, Y)\cos(\varrho, Z) + 2B'\cos(\varrho, Z)\cos(\varrho, X) + 2C'\cos(\varrho, X)\cos(\varrho, Y)$$

eine centrische Oberfläche zweiten Grades dar, die auf ihre Hauptaxen bezogen ist, wenn A', B', C' verschwinden. Das letztere geschieht aber nur, wenn jedes der A'_h, B'_h, C'_h für sich gleich Null ist. In diesem Falle wird nach S. 5 je eines der A, B, C mit T_1, T_2, T_3 identisch, — die Hauptaxen der Oberfläche (13) geben also durch ihre Richtung und Größe das Tensortripel T_1, T_2, T_3 an.

Wie die Vectoren aus ihren Componenten mit Hülfe der Construction des Parallelopipedes erhalten werden, so resultirt ein Tensortripel mit Hülfe der Construction, welche die oben betrachtete Oberfläche zweiten Grades an die Hand giebt und die wir kurz als die Construction des Ellipsoides bezeichnen können.

An dieser Stelle mag auf eine in der allgemeinen Mechanik

vorkommende höchst wichtige Functionenreihe hingewiesen werden, welche die Natur von Tensorcomponenten besitzt.

Die Trägheitsmomente eines Körpers um die Coordinatenaxen sind Tensorcomponenten erster, die entsprechenden Deviationsmomente sind solche zweiter Art. Das zugehörige Tensortripel ist dasjenige der Hauptträgheitsmomente. —

Wie die Componenten eines einzelnen Tensors, so verhalten sich auch diejenigen eines Tensortripels bei Coordinatentransformationen wie Quadrate und Producte von Vectorcomponenten. Hieraus fließt ein Merkmal dafür, unter welchen Umständen sechs paarweis auf je eine Coordinatenaxe bezogene Functionen als Componenten eines Tensortripels aufgefaßt werden können. Sind ihre Transformationseigenschaften die geforderten, so ist das zugehörige Tensortripel nach der Methode des Ellipsoides aus ihnen abzuleiten.

Es ist bekannt, daß die Vectorcomponenten F, G, H sich auf ein anderes Coordinatensystem derartig transformiren, daß dieselben Coefficienten auch für die reciproke Transformation gelten. Sind α_k, β_k, γ_k die relativen Richtungscosinus der beiden Coordinatensysteme X, Y, Z und X_0, Y_0, Z_0, so kann man demgemäß den Zusammenhang zwischen den nach den beiden Systemen gewonnenen Componenten durch folgendes Schema angeben

14)

	F	G	H
F_0	α_1	β_1	γ_1
G_0	α_2	β_2	γ_2
H_0	α_3	β_3	γ_3.

Dasselbe (orthogonale) Verhalten zeigen die sechs Aggregate

$$F^2,\ G^2,\ H^2,\ GH\sqrt{2},\ HF\sqrt{2},\ FG\sqrt{2}$$

und somit auch die aus den Tensorcomponenten gewonnenen Ausdrücke

$$A,\ B,\ C,\ A'\sqrt{2},\ B'\sqrt{2},\ C'\sqrt{2}.$$

Das System der Transformationscoefficienten lautet, falls $\sqrt{2} = r$ gesetzt wird,

15)

	A	B	C	rA'	rB'	rC'
A_0	α_1^2	β_1^2	γ_1^2	$r\beta_1\gamma_1$	$r\gamma_1\alpha_1$	$r\alpha_1\beta_1$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
rA_0'	$r\alpha_2\alpha_3$	$r\beta_2\beta_3$	$r\gamma_2\gamma_3$	$(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)$	$(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3)$	$(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

was wir abkürzen in

16)

	A	B	C	rA'	rB'	rC'
A_0	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

5) **Beziehungen zwischen Scalaren, Vectoren, Tensoren.** Ist eine scalare Größe S eine Function eines Vectors V, d. h. also, symmetrisch ausgedrückt, die seiner Componenten F, G, H, so sind bekanntlich

$$17)\qquad F_s = \frac{\partial S}{\partial F},\ G_s = \frac{\partial S}{\partial G},\ H_s = \frac{\partial S}{\partial H}$$

Vectorcomponenten specieller Art. Der wichtigste Fall ist der, daß S als Function der Coordinaten x, y, z gegeben ist.

Analog sind nach ihren Transformationseigenschaften

$$18)\qquad \begin{aligned} A_s &= \frac{\partial^2 S}{\partial F^2},\ B_s = \frac{\partial^2 S}{\partial G^2},\ C_s = \frac{\partial^2 S}{\partial H^2} \\ A'_s &= \frac{\partial^2 S}{\partial G \partial H},\ B'_s = \frac{\partial^2 S}{\partial H \partial F},\ C'_s = \frac{\partial^2 S}{\partial F \partial G} \end{aligned}$$

Tensorcomponenten specieller Art.

Ist der Scalar S als Function eines Tensortripels, d. h. als Function der sechs Componenten A, B, C, A', B', C' gegeben, so sind

$$19)\qquad \begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial S}{\partial A},\ B_1 = \frac{\partial S}{\partial B},\ C_1 = \frac{\partial S}{\partial C}, \\ A'_1 &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial A'},\ B'_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial B'},\ C'_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial C'} \end{aligned}$$

gleichfalls Tensorcomponenten.

Hiermit hängt zusammen, daß die aus zwei Vectoren, resp. aus zwei Tensortripeln abgeleiteten Größen

$$20)\qquad S = F_1F_2 + G_1G_2 + H_1H_2,$$

und

$$21)\qquad S = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + 2(A'_1A'_2 + B'_1B'_2 + C'_1C'_2)$$

scalare Functionen sind.

Ist ein Vector V_1 als Function eines anderen Vectors V gegeben, so kann man aus ihm Vector- und Tensorcomponenten durch folgende Operationen gewinnen

$$22)\qquad F_2 = \frac{\partial H_1}{\partial G} - \frac{\partial G_1}{\partial H},\ G_2 = \frac{\partial F_1}{\partial H} - \frac{\partial H_1}{\partial F},\ H_2 = \frac{\partial G_1}{\partial F} - \frac{\partial F_1}{\partial G},$$

$$23)\qquad \begin{aligned} A_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial F},\ B_2 = \frac{\partial G_1}{\partial G},\ C_2 = \frac{\partial H_1}{\partial H}, \\ A'_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial G} + \frac{\partial G_1}{\partial H}\right),\ B'_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial H} + \frac{\partial H_1}{\partial F}\right),\ C'_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial G_1}{\partial F} + \frac{\partial F_1}{\partial G}\right). \end{aligned}$$

Haben die Functionen F_1, G_1, H_1 die Natur der $F_{\prime}$, $G_{\prime}$, $H_{\prime}$ in (17), so wird F_2, G_2, H_2 zu Null, $A_2, \cdots A_2', \cdots$ werden mit den $A_{\prime}, \cdots A_{\prime}', \cdots$ in (18) identisch.

Der häufige Fall ist auch hier der, daß die unabhängigen Vectorcomponenten F, G, H mit den Coordinaten identisch werden. Dann ist der in (22) dargestellte Zusammenhang dem sonst durch $V_2 = \text{curl}\ V_1$ oder $V_2 = \text{vort}\ V_1$ bezeichneten gleich. — Der allgemeine Fall giebt Veranlassung zu einer principiell wichtigen Bemerkung.

In verschiedenen Gebieten der Krystallphysik kommen lineäre Beziehungen zwischen verschiedenen Vectoren vor. Schreiben wir eine solche

24)
$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda_{11}F + \lambda_{12}G + \lambda_{13}H, \\ G_1 &= \lambda_{21}F + \lambda_{22}G + \lambda_{23}H, \\ H_1 &= \lambda_{31}F + \lambda_{32}G + \lambda_{33}H, \end{aligned}$$

und wenden wir die Gleichungen (22) und (23) darauf an, so resultirt

25)
$$\lambda_{32} - \lambda_{23} = F_2, \ \lambda_{13} - \lambda_{31} = G_2, \ \lambda_{21} - \lambda_{12} = H_2,$$

26)
$$\begin{gathered} \lambda_{11} = A_2, \ \lambda_{22} = B_2, \ \lambda_{33} = C_2, \\ \tfrac{1}{2}(\lambda_{32} + \lambda_{23}) = A_2', \ \tfrac{1}{2}(\lambda_{13} + \lambda_{31}) = B_2', \ \tfrac{1}{2}(\lambda_{21} + \lambda_{12}) = C_2'. \end{gathered}$$

Die neun Constanten des Ansatzes (24) bestimmen also drei Vector- und sechs Tensorcomponenten. In gewissen Fällen (z. B. bei magnetischer und diëlectrischer Influenz) bestehen allgemein die Beziehungen $\lambda_{hk} = \lambda_{kh}$, in anderen (z. B. bei Wärme- und Electricitätsleitung) gelten sie nur für gewisse Krystallsysteme. Finden sie statt, so ist der Krystall durch ein einziges ihm individuelles Tensortripel (das der Hauptpermeabilitäten oder Hauptleitfähigkeiten) in Bezug auf die betreffenden Vorgänge vollständig characterisirt; im andern Falle kommt noch ein Vector hinzu.

Diese Resultate, denen noch andere zur Seite gestellt werden können, sind deshalb von Wichtigkeit, weil sie zeigen, daß nicht nur Variable, sondern auch constante Parameter die Natur von Vector- und Tensorcomponenten haben.

Thesen.

Die Tensoren haben, als gerichtete Größen, eine gewisse Verwandtschaft mit den Vectoren; indessen bedingt die Zweiseitigkeit der Tensoren wesentliche Unterschiede in dem beiderseitigen Verhalten.

Die bei tensoriellen Vorgängen im Allgemeinen stets auftre-

tenden Tensortripel mit ihren sechs von einander unabhängigen Componenten haben bei den Vectoren keinerlei Analogon.

Da überdies Tensortripel in den verschiedensten Gebieten der Physik bei Variabeln, wie bei constanten Parametern auftreten, so ist eine selbstständige Behandlung der Tensoren sachgemäß.

II. Allgemeine Eigenschaften der Drucke in deformirbaren Körpern.

6) **Fernwirkungs- und Nahwirkungstheorie.** Wie so manches andere Gebiet der theoretischen Physik, so ist auch die Elasticitätstheorie zuerst erschlossen worden mit Hülfe einer speciellen Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges, die wir kurz die molekulare nennen wollen. Der Körper wird aus discreten Elementarmassen — Moleküle im weiteren Sinne des Wortes — aufgebaut gedacht, die durch ihre nur in unmerklichen Entfernungen merklichen Wechselwirkungen in ihren Positionen erhalten, resp. aus denselben bewegt werden. Speciell für einen homogenen undeformirten Krystall wird angenommen, daß seine Moleküle identisch, gleichorientirt und derartig regelmäßig vertheilt sind, daß jedes Molekül von anderen in der gleichen Weise umgeben wird. Die Wirkungsweite wird als sehr groß gegen den Abstand benachbarter Moleküle betrachtet, und es wird festgesetzt, daß die Deformationen derartig langsam mit dem Ort variiren, daß die Vertheilung der Moleküle auch im deformirten Krystall innerhalb des Bereiches der molekularen Wirkungssphäre als regelmäßig in dem oben erörterten Sinne angesehen werden kann.

Die auf derartigen speciellen Grundvorstellungen zuerst von Navier[4]), Cauchy[5]) und Poisson[6]) aufgebaute molekulare oder Fernwirkungstheorie gerieth schon frühzeitig in Mißcredit, da sie die Erscheinungen der Elasticität in isotropen Körpern von einer einzigen Componente abhängig macht, und zahlreiche Beobachtungen mit diesem Resultat in Widerspruch zu stehen schienen.

So gelangte eine neue Theorie zeitweise zur allgemeinen Geltung, welche in einer für andere Gebiete der Physik vorbildlichen Weise die Elementargesetze der Elasticität dadurch erhält, daß sie die Materie innerhalb der Körper als continuirlich ansicht, die Wechselwirkung zwischen verschiedenen benachbarten Theilen in ihre Trennungsfläche verlegt und die Grundformeln der Elasticitätstheorie durch Anwendung der Schwerpunkts-, der Flächensätze und der Energiegleichung auf geeignet gewählte Volumenelemente des betrachteten Körpers gewinnt[7]). Diese Theorie, die

wir kurz als Nahwirkungstheorie bezeichnen, liefert für isotrope Medien, im Gegensatz zu der vorigen, zwei characteristische Constanten und hat sich in allen ihren Resultaten mit der Beobachtung im Einklang erwiesen.

Längere Zeit, nachdem die Molekulartheorie der Elasticität bei isotropen Körpern zu Bedenken geführt hatte, erlitt sie auch bei Krystallen eine Niederlage nach der anderen; denn die für jene Körper von ihr gelieferten Gesetze erwiesen sich in den meisten Fällen als mit der Beobachtung nicht vereinbar, während die aus der Nahwirkungstheorie folgenden sich bestätigten. Wir gehen weiter unten auf diesen Punkt ausführlicher ein. —

Wenn man sich kein anderes Ziel steckt, als die Elementargesetze der Elasticität in einer der Wirklichkeit entsprechenden Form zu gewinnen, so wird man sich mit den durch die Nahwirkungstheorie gelieferten Resultaten zufrieden geben, ohne zu fragen, warum die Molekularhypothese zu unrichtigen Resultaten führt. Wenn man aber nach einer consequenten allgemeinen Theorie der Materie strebt und im Auge behält, welche außerordentlichen Resultate in anderen Gebieten mit Hülfe analoger Hypothesen gewonnen sind, so wird man eine Untersuchung über die Ursachen, welche dieselbe im Gebiete der Elasticität anscheinend versagen ließen, für lehrreich halten. Eine solche Untersuchung zeigt nun, daß die ältere Molekulartheorie der Elasticität von einer unnöthig specialisirten Grundvorstellung, nämlich der Hypothese in der Verbindungslinie liegender und allein von der Entfernung abhängiger Molekularwirkungen ausging und nur aus diesem Grunde scheiterte.

Von der Unzulässigkeit dieser Vorstellung hätte übrigens schon eine einfache Ueberlegung des Mechanismus der Wachsthumserscheinungen von Krystallen überzeugen müssen. Denn der regelmäßige Aufbau eines aus einer Lösung oder einem Schmelzfluß gebildeten Krystalles ist doch allein dann verständlich, wenn auf das dem wachsenden Krystall zuwandernde Theilchen ein richtendes Drehungsmoment wirkt, welches dasselbe in paralleler Orientierung den schon im Krystallverband vorhandenen anlagert. Mit solchen Drehungsmomenten sind aber nach dem Energieprincip wechselwirkende Kräfte, die in der Verbindungslinie liegen und nur von der Entfernung abhängen, unvereinbar. Denn die Existenz der Drehungsmomente erfordert ein von der gegenseitigen Orientierung abhängiges Potential der Wechselwirkung, und ein solches führt auf Kräfte, die mit der Richtung variiren und im Allgemeinen nicht in die Verbindungslinie fallen.

Eine molekulare Theorie, die diesen Umständen Rechnung zu tragen sucht, hat bereits Poisson[8]) in seiner letzten unvollendeten Abhandlung entworfen; aber er macht noch einige beschränkende Annahmen, und seine Resultate sind demnach specieller, als die der Nahwirkungstheorie, und theilweise nicht mit der Beobachtung vereinbar. Eine allgemeinere Darstellung, die vom Referenten herrührt[9]), soll im Folgenden skizzirt werden.

7) **Druckcomponenten in deformirbaren Körpern.** Seit den grundlegenden Arbeiten von Cauchy und Poisson ist es allgemein üblich, auch die molekulare Elasticitätstheorie nicht auf die Betrachtung des einzelnen Moleküles, sondern auf die eines Volumenelementes zu gründen, das groß gegen die Wirkungsweite der Molekularkräfte ist und somit eine überaus große Anzahl von Molekülen enthält. Die Wirkung der das Volumenelement umgebenden Moleküle findet dann nur auf die der Begrenzungsfläche unmittelbar anliegenden innern Moleküle statt und combinirt sich zu den sogenannten Druckcomponenten.

Diese letzteren sind bekanntlich durch Cauchy und Poisson[10]) definirt als die Summen paralleler Componenten, die alle Moleküle (i) innerhalb eines geraden, über einem Flächenelement q errichteten Cylinders erfahren von allen Molekülen (a), die auf der andern Seite von q liegen, — dividirt durch q, d. h. reducirt auf die Fläche Eins.

i

a

Da die Dimensionen des Flächenelementes groß sind gegen die Wirkungsweite der zwischen den Molekülen stattfindenden Kräfte, und da diese Wirkungsweite wiederum groß ist gegen den Abstand benachbarter Moleküle, so können diese Druckcomponenten in einem homogenen Körper als allein von der Orientirung des Flächenelementes abhängig gelten; in einem seinem Zustand nach stetig mit dem Ort variirenden Körper sind sie außerdem noch Functionen der Coordinaten.

Man pflegt die Orientirung des Flächenelementes durch die Richtung der Normalen n zu bestimmen, welche positiv nach der Seite (i) gezählt wird, auf der die angezogenen Massen liegen, — d. h. also, falls es sich um das Element einer Oberfläche handelt, die das betrachtete Volumen umschließt, von außen nach innen positiv.

Was die Bezeichnung der Druckcomponenten angeht, so kann wohl kein Zweifel darüber sein, daß ein Symbol mit zwei Buchstaben, der eine für die Richtung der Componente, der andere für die Richtung der Flächennormale, allein der Sache entspricht. Man kommt so fast mit Nothwendig-

keit zu dem wohl zuerst von Fr. Neumann[11]) gemachten Vorschlag, die Componente in einer Richtung S gegen ein Flächenelement mit der (inneren) Normale n durch S_n zu bezeichnen. Nach der im Vorstehenden gegebenen Definition ist dann also

27) $$q S_n = \sum_i \sum_a S_{ia},$$

wobei S_{ia} die Componente der von einem Molekül (a) auf ein Molekül (i) ausgeübten Kraft nach der Richtung S bezeichnet, und $\sum_a$ über alle Moleküle auf der negativen Seite von q, $\sum_i$ über alle in dem nach der positiven Seite construirten Cylinder liegenden zu nehmen ist.

Für die zu den Coordinatenaxen parallelen Druckcomponenten gegen die zu den Coordinatenebenen parallelen Flächenelemente ergiebt sich so von selbst das System Bezeichnungen

$$X_x, X_y, X_z, \quad Y_x, Y_y, Y_z, \quad Z_x, Z_y, Z_z,$$

die in der Abkürzung $X_x, \ldots Z_z$ immer in dieser Reihenfolge geschrieben zu denken sind.

X_x, Y_y, Z_z kann man passend als normale, $Y_z, Z_y, Z_x, \; X_z, X_y, Y_x$ als tangentiale Drucke bezeichnen; ebenso allgemeiner S_s, T_t einerseits, S_t, T_s anderseits, wenn $t \perp s$.

Poisson[12]) hat gezeigt, daß nach der oben gegebenen Definition die Druckcomponenten gegen Parallele zu den Coordinatenebenen sich folgendermaßen berechnen. Es ist

28) $$X_x = -\tfrac{1}{2}\nu \mathrm{S} xX, \;\; Y_x = -\tfrac{1}{2}\nu \mathrm{S} xY, \;\; Z_x = -\tfrac{1}{2}\nu \mathrm{S} xZ, \text{ u. s. f.},$$

wobei die Summen S über alle Kräfte X, Y, Z zu erstrecken sind, die ein Molekül von allen übrigen mit den relativen Coordinaten x, y, z erfährt, und ν die Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit bezeichnet.

Aus den vorstehenden Werthen der Druckcomponenten folgen die Beziehungen

29) $$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \text{ u. s. f.}$$

Es ist bekannt, daß die Nahwirkungstheorie gleichfalls auf diese fundamentalen Gleichungen führt. —

So lange es sich um Drucke gegen ein und dasselbe Flächenelement handelt, sind die Größen X_n, Y_n, Z_n gewöhnliche Vectorcomponenten, also mit dem resultirenden Vector P_n, dem Gesammtdruck, verbunden durch die Beziehungen

30) $$P_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2;$$

31) $$\cos(P, X) = X_n/P_n, \;\; \cos(P, Y) = Y_n/P_n, \;\; \cos(P, Z) = Z_n/P_n.$$

Läßt man aber die Richtung der Normalen n bei ungeänder-

tem Ort des Flächenelementes beliebig, so treten complicirtere Beziehungen ein.

Nach den Transformationseigenschaften der $X_x, \ldots Z_z$, die direct aus ihren in (28) enthaltenen Definitionen und umständlicher auch aus den Gleichungen (29) und (31) hervorgehen, sind nämlich X_x, Y_y, Z_z die Componenten erster,

$$\tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y),\ \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z),\ \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x)$$

die Componenten zweiter Art eines Tensortripels, dagegen

$$(Y_z - Z_y),\ (Z_x - X_z),\ (X_y - Y_x)$$

die Componenten eines Vectors.

Die Tensoren des Tripels sind nach S. 5 den Componenten erster Art gleichartig, also wie sie, Normaldrucke, die sogenannten Hauptdrucke, welche P_1, P_2, P_3 heißen mögen; der Vector ist nach der directen Anschauung das auf die Volumeneinheit bezogene Drehungsmoment, das der Körper in Folge der innern Drucke erfährt. —

Wir haben bisher ausschließlich die Druckwirkungen der zwischen den Molekülen ausgeübten Kräfte in Betracht gezogen, es ist aber klar, daß die zwischen ihnen wirkenden Drehungsmomente oder Kräftepaare eine analoge Behandlung gestatten. Auch sie kommen bei dem betrachteten Volumenelement allein in Summen von der in (27) enthaltenen Form zur Geltung, die man als Momentendrucke bezeichnen kann; für eine beliebige Drehungsaxe D schreiben wir etwa

$$32)\qquad q D_n = \sum_i \sum_a D_{ia},$$

wobei die Summationen so zu nehmen sind, wie S. 129 dargelegt ist.

In den speciellen Fällen, daß die Momente um die Coordinatenaxen genommen sind, und daß die Drucke gegen Parallele zu den Coordinatenebenen wirken, erhält man die neun speciellen Momentendrucke

$$L_x, L_y, L_z,\ M_x, M_y, M_z,\ N_x, N_y, N_z,$$

die den $X_x, \ldots Z_z$ genau entsprechen.

Die molekularen Drehungsmomente werden durch die Energiegleichung in einen bestimmten Zusammenhang mit den molekularen Kräften gebracht. Wendet man wieder die Bezeichnungen $X_{ia}, \ldots$ und $L_{ia}, \ldots$ für die Componenten und Momente an, die ein Molekül (i) von einem Molekül (a) erfährt, und setzt man die relativen Coordinaten

$$x_i - x_a = x_{ia},\quad y_i - y_a = y_{ia},\quad z_i - z_a = z_{ia},$$

so gilt[13])

33) $$L_{ia} + L_{ai} + Z_{ia} y_{ia} - Y_{ia} z_{ia} = 0, \text{ u. s. f.}$$

Sind speciell die Moleküle gleich orientirt, so ist nach Symmetrie $L_{ia} = L_{ai}$, also

34) $$L_{ia} = \tfrac{1}{2}(Y_{ia} z_{ia} - Z_{ia} y_{ia}), \text{ u. s. f.}$$

Da nach der Annahme innerhalb der Wirkungssphäre der Molekularkräfte die Moleküle auch nach der Deformation des Körpers merklich parallel sind, so gestattet die letzte Formel die Anwendung in den Summen für $L_x, \ldots N_z$. Da aber die Wirkungsweite nach dem oben Gesagten als eine unendlich kleine Größe (zweiter Ordnung sogar) zu betrachten ist, so ergeben sich diese Summen in derselben Weise unmerklich klein neben denen, welche die Druckcomponenten $X_x, \ldots . Z_z$ definiren, wie z. B. in der Capillaritätstheorie die Laplace'sche Constante H unmerklich ist neben der Constanten K. Wir werden daher, abgesehen von hier nicht in Betracht kommenden speciellen Fällen, von der Einführung der Momentendrucke absehen können.

8) **Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.** Die Probleme, die sich auf das Verhalten einer Function innerhalb eines Raumes beziehen, erfordern die Aufstellung von Bedingungen, die zu jeder Zeit für jeden inneren Punkt gelten, neben solchen, die sich nur auf die Punkte der Oberfläche, und solchen, die sich nur auf einen bestimmten Zeitpunkt beziehen. Eine allgemein anerkannte Bezeichnung der verschiedenen Arten von Formeln ist nicht vorhanden. Der Sache würde gut entsprechen, die Bedingungen erster Art als Hauptgleichungen, die zweiter als Oberflächenbedingungen und die dritter als Anfangsbedingungen zu bezeichnen.

Die Kräfte, welche auf deformirbare Körper ausgeübt werden können, zerfallen in solche, die auf innere, und solche, die auf Oberflächenpunkte wirken. Die ersten können passend als räumliche Kräfte oder Volumenkräfte bezeichnet werden, wenn sie auf die Volumeneinheit, als Massenkräfte, wenn sie auf die Masseneinheit bezogen sind. Die letzteren Kräfte werden passend äußere Drucke genannt.

Aeußere Momentendrucke auszuüben haben wir aus den oben erörterten Ursachen kein Mittel; dagegen wollen wir aus bestimmten Gründen die Möglichkeit zulassen, von außen her molekulare Drehungsmomente, räumliche Momente auf innere Punkte auszuüben. Dies würde z. B. dann möglich sein, wenn die als Moleküle bezeichneten Elementarmassen electrische oder magnetische Polaritäten besäßen, und der Körper in ein electrisches oder magnetisches Feld gebracht würde.

Bezeichnen wir die räumlichen Componenten und die räumlichen Momente nach den Coordinatenaxen mit X', Y', Z' und L', M', N', verstehen wir unter ϱ die Dichte, setzen wir unendlich kleine Verrückungen s mit den Componenten u, v, w voraus und vernachlässigen die Producte aus den Rotationsbeschleunigungen in die unendlich kleinen Trägheitsmomente der Moleküle, so nehmen die Hauptgleichungen der Elasticität die folgende Form an

35) $$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X' + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \text{ u. s. f.}$$

36) $$Z_y - Y_z - L' = 0, \text{ u. s. f.}$$

Die Oberflächenbedingungen wollen wir in der Form schreiben, daß wir die äußern Drucke mit den Componenten $(X), (Y), (Z)$ einführen. Sie lauten dann

37) $$\overline{X}_n = (X), \quad \overline{Y}_n = (Y), \quad \overline{Z}_n = (Z),$$

wobei n die *innere* Normale auf dem Oberflächenelement bezeichnet, und $\overline{G}$ bedeutet, daß die Funktion G in der Oberfläche zu nehmen ist.

In dem speciellen Falle, daß körperliche Drehungsmomente nicht ausgeübt werden, gehen die Formeln (36) in

38) $$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x$$

über; hier werden also die nur sechs unabhängigen Druckcomponenten

$$X_x, Y_y, Z_z, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x,$$

die jederzeit in dieser Reihenfolge geordnet werden mögen, direct *zu den Componenten erster und zweiter Art des Tripels der Hauptdrucke* P_1, P_2, P_3.

Es mag bemerkt werden, daß hier die *Componenten* $X_x, .. X_y$ *nicht nur Bestimmungsstücke des Tensortripels darstellen, sondern ihm auch aequivalent sind.*

Thesen.

Die Bezeichnung S_n für eine parallel zu S liegende Druckcomponente gegen ein Flächenelement mit der (innern) Normale n ist nach Anschaulichkeit und Beweglichkeit allen andern vorzuziehen.

Die Bedingungsgleichungen für räumliche Probleme werden passend in *Hauptgleichungen*, *Oberflächenbedingungen* und *Anfangsbedingungen* zerlegt.

Aeußere Kräfte, die auf innere Punkte wirken, werden, wenn auf die Masseneinheit bezogen, passend als *Massenkräfte*, wenn auf die Volumeneinheit bezogen, passend als *räumliche*,

oder Volumenkräfte bezeichnet. Im allgemeinen empfiehlt es sich, die letztere Darstellung zu bevorzugen.

III. Specielle Gesetze der Drucke in elastischen Körpern.

9) **Allgemeine Beziehungen.** Die neun Druckcomponenten $X_x, \ldots Z_z$ sind nach der molekularen Theorie ganz allgemein durch die Formeln (28) definirt. Unter den auf S. 128 zusammengestellten Voraussetzungen und unter der Annahme, daß der Körper aus einem Zustand, in dem alle Drucke verschwinden, durch unendlich kleine stetige Verrückungen mit den Componenten u, v, w und begleitende unendlich kleine stetige Molekulardrehungen mit den Componenten l, m, n deformirt wird, lassen sich die in jenen Formeln auftretenden Summen auswerthen [14]).

Das Resultat der Rechnung sind neun Formeln von der Gestalt

39)
$$\begin{aligned}-X_x = {} & C_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + n\right) + C_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - m\right)\\ & + C_{14}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - n\right) + C_{15}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{16}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + l\right)\\ & + C_{17}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + m\right) + C_{18}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - l\right) + C_{19}\frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}$$

in denen die C_{hk} dem Körper (im undeformirten Zustande) und der Orientirung des Coordinatensystemes individuelle Parameter bezeichnen, die sich einerseits durch das Gesetz der Elementarwirkung, andrerseits durch die Vertheilung der Moleküle im Raum bestimmen, und zwischen denen die Beziehungen $C_{hk} = C_{kh}$ bestehen. Die Zahl der von einander unabhängigen Constanten C_{hk} ist somit 45.

Wirken auf den Körper räumliche Drehungsmomente L', M', N' nicht ein, ist also nach (36) $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$, so lassen sich mit Hülfe dieser Beziehungen die Drehungscomponenten l, m, n aus den Formeln für die Druckcomponenten climiniren.

Das Resultat dieser Operation sind sechs Ausdrücke für die Druckcomponenten

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x,$$

welche homogen lineär sind in den sechs Argumenten

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

die bekanntlich für die ganze Theorie der Elasticität fundamentale Bedeutung haben und weiter unten noch besprochen werden sollen. Hier mag nur eine abgekürzte Bezeichnung für sie eingeführt werden.

Wie die sechs Druckcomponenten, so bezieht sich auch jeder der obigen sechs Differentialausdrücke auf eine resp. auf zwei Coordinatenaxen und es bietet sich daher ganz von selbst eine zu derjenigen der Druckcomponenten analoge Bezeichnung dar.

Wir setzen nach dem Vorgange von Kirchhoff[15])

$$40)\quad \begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x} = x_x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = y_y,\ \frac{\partial w}{\partial z} = z_z,\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y_z = z_y, \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = z_x = x_z,\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = x_y = y_x, \end{gathered}$$

werden jedoch weiter unten die Nachtheile, welche diese Bezeichnung trotz unleugbarer Vorzüge hat, darlegen.

Die obigen sechs Argumente $x_x, \dots x_y$ werden im Weiteren jederzeit in dieser, derjenigen der Druckcomponenten entsprechenden Reihenfolge geordnet angenommen.

Das Resultat der oben erwähnten Elimination sind dann sechs Gleichungen von der Form

$$41)\quad -X_x = c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z + c_{14} y_z + c_{15} z_x + c_{16} x_y,$$

in denen die c_{hk} der Substanz des Körpers und der Orientirung des Coordinatensystems individuelle Parameter bezeichnen. Zwischen ihnen bestehen die Beziehungen

$$42)\quad c_{hk} = c_{kh};$$

die Zahl der von einander unabhängigen Parameter c_{hk} ist somit 21.

Außer den Gleichungen (41) ergeben sich noch drei lineäre Beziehungen zwischen den Drehungscomponenten l, m, n und den neun Differentialquotienten $\partial u/\partial x \dots \partial w/\partial z$, die sich in bemerkenswerther Weise ordnen lassen.

Führt man nämlich die Componenten

$$43)\quad \lambda = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \mu = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \nu = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

der Drehung des Volumenelementes in Bezug auf die Coordinatenaxen ein, so werden die Gleichungen homogen lineär in den neun Argumenten

$$l - \lambda,\ m - \mu,\ n - \nu,\ x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y.$$

Die relativen Drehungen der Moleküle gegen die Volumenelemente stellen sich somit als lineäre Functionen von $x_x, \dots x_y$ dar. —

Es mag nun erörtert werden, wie die Methode der Nahewirkungstheorie zu den analogen Resultaten gelangt. Dabei wollen wir, um die Symmetrie der Behandlung vollständig zu machen, zunächst die Einwirkung räumlicher Drehungsmomente L', M', N' auf die Elementarmassen, wie zuvor, zulassen. Faßt man die drei

Formeln (35) mit den Factoren du, dv, dw, die drei Formeln (36) mit dl, dm, dn zusammen, wobei die ersteren Faktoren die auf dt bezogenen Aenderungen der Verschiebungscomponenten, die letzteren diejenigen der molekularen Drehungscomponenten bezeichnen, und integrirt das Resultat über den ganzen Körper oder auch einen beliebigen Theil desselben, so erhält man die Gleichung der lebendigen Kraft für den betrachteten Bereich. Die dem Differentiale der lebendigen Kraft gleiche Arbeit zerfällt in die Arbeit der räumlichen Kräfte, der räumlichen Momente, der äußern Drucke und schließlich in den als Arbeit der innern Drucke an der Volumeneinheit aufzufassenden Ausdruck

44) $$\begin{aligned} d\alpha = {} & X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z \\ & + \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y)\, dy_z + \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z)\, dz_x + \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x)\, dx_y \\ & + \ (Y_z - Z_y)\, d(l-\lambda) + (Z_x - X_z)\, d(m-\mu) + (X_y - Y_x)\, d(n-\nu). \end{aligned}$$

Nun muß nach den Grundsätzen der Thermodynamik $d\alpha$ das (negative) Differential einer nur vom augenblicklichen Zustand an der betrachteten Stelle abhängigen Function, des allgemeinen elastischen Potentiales Φ der Volumeneinheit, sein. Φ ergiebt sich hieraus als eine Function von $l-\lambda$, $m-\mu$, $n-\nu$, $x_x, \dots x_y$ und es muß gelten

45) $$\begin{gathered} X_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_x}, \quad Y_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_y}, \quad Z_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_z}, \\ \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_z}, \quad \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_x}, \quad \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_y}, \\ Y_z - Z_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial (l-\lambda)}, \quad Z_x - X_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial (m-\mu)}, \quad X_y - Y_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial (n-\nu)}. \end{gathered}$$

Die unbekannte Function Φ denken wir uns nun nach Potenzen der neun Argumente entwickelt. In dem Resultat hat das constante Glied keinen Einfluß und kann beseitigt werden; das lineäre Glied würde auf Drucke auch im nicht deformirten Körper führen und muß nach der oben gemachten Annahme verschwinden. So erhält man als niedrigstes Glied der Entwickelung, das, soweit die Beobachtung dies gestattet, als einziges beizubehalten ist, einen in $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, l-\lambda, m-\mu, n-\nu$ homogenen Ausdruck zweiten Grades.

Wir setzen

46) $$\Phi = \varphi + \psi + \chi$$

wobei bedeutet

47) $$\begin{aligned} 2\varphi = {} & \alpha_{11} x_x^2 + 2\alpha_{12} x_x y_y + 2\alpha_{13} x_x z_z + \cdots + 2\alpha_{16} x_x x_y \\ & + \ \alpha_{22} y_y^2 \ + 2\alpha_{23} y_y z_z + \cdots + 2\alpha_{26} y_y x_y \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi = & (l-\lambda)(\beta_{11}x_x+\beta_{12}y_y+\cdots+\beta_{16}x_y)\\ 48) \qquad & +(m-\mu)(\beta_{21}x_x+\beta_{22}y_y+\cdots+\beta_{26}x_y)\\ & +(n-\nu)(\beta_{31}x_x+\beta_{32}y_y+\cdots+\beta_{36}x_y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\chi = & \gamma_{11}(l-\lambda)^2+2\gamma_{12}(l-\lambda)(m-\mu)+2\gamma_{13}(l-\lambda)(n-\nu)\\ 49) \qquad & +\gamma_{22}(m-\mu)^2 \qquad +2\gamma_{23}(m-\mu)(n-\nu)\\ & \qquad\qquad +\gamma_{33}(n-\nu)^2,\end{aligned}$$

wobei $\alpha_{hk} = \alpha_{kh}$, $\gamma_{hk} = \gamma_{kh}$, aber nicht nothwendig $\beta_{hk} = \beta_{kh}$ ist.

Die α_{hk}, β_{hk}, γ_{hk} bezeichnen dabei der Substanz und dem Coordinatensystem individuelle Parameter. Nach diesen Ansätzen gilt dann

50) $$X_x = -\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x_x}, \text{ u. s. f.}, \ \tfrac{1}{2}(Y_z+Z_y) = -\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y_z}, \text{ u. s. f.}$$

51) $$-L' = Y_z - Z_y = -\frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(l-\lambda)}, \text{ u. s. f.}$$

Wird die Wirksamkeit räumlicher Drehungsmomente L', M', N' ausgeschlossen, so ist

52) $$\frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(l-\lambda)} = 0, \ \frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(m-\mu)} = 0, \ \frac{\partial(\psi+\chi)}{\partial(n-\nu)} = 0.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen $l-\lambda$, $m-\mu$, $n-\nu$ durch $x_x, \ldots x_y$. Setzt man die aus ihnen folgenden Werthe in die Function ψ ein, so wird sie in $x_x, \ldots x_y$ homogen vom zweiten Grade. Wir können demgemäß schreiben

$$\begin{aligned}2(\varphi+\chi) = 2f = & c_{11}x_x^2+2c_{12}x_xy_y+2c_{13}x_xz_z+\cdots+2c_{16}x_xx_y\\ 53) \qquad & +c_{22}y_y^2 \ +2c_{23}y_yz_z+\cdots+2c_{26}y_yx_y\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

wobei nun gilt:

54) $$X_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x}, \ Y_z = -\frac{\partial f}{\partial y_z}, \ldots;$$

f wird als das elastische Potential im engern Sinne des Wortes bezeichnet.

Es ist klar, daß die hier abgeleiteten Resultate mit den auf S. 134 erhaltenen vollständig übereinstimmen.

Die Fernwirkungstheorie vermag aber in einer wesentlichen Hinsicht über dies auch von der Nahwirkungstheorie gelieferte Resultat hinauszugehen. Da bei ihr die Parameter C_{hk} und demgemäß auch die c_{hk} sich aus dem Gesetz der Molekularwirkung und der Vertheilung der Moleküle im Raume berechnen lassen, so kann man durch specielle Annahmen über diese beiden Umstände specielle Relationen zwischen den elastischen Parametern ableiten

und diese Resultate mit der Erfahrung vergleichen. Die Beobachtungen können auf diese Weise zur Prüfung specieller Hypothesen und damit zum Ausbau unserer Vorstellungen über Molekularwirkungen dienen.

Auf die wichtigste der in Betracht kommenden Specialisirungen der oben erörterten allgemeinen Annahmen über die Molekularwirkungen ist schon früher hingewiesen worden: die Hypothese, daß die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte in die Verbindungslinie fallen und nur Functionen der Entfernung sind. Sie führt, wie Poisson und Cauchy gezeigt haben[16]), ohne daß über die Anordnung der Moleküle eine specielle Annahme gemacht wäre, auf folgende sechs Beziehungen zwischen den Parametern c_{hk}

55) $$c_{44} = c_{23},\quad c_{55} = c_{31},\quad c_{66} = c_{12}$$
$$c_{56} = c_{14},\quad c_{64} = c_{25},\quad c_{45} = c_{36}$$

die kurz als die Poisson-Cauchy'schen Relationen bezeichnet werden mögen.

Noch speciellere Beziehungen erhält man, wenn man nach Lord Kelvin bestimmte Annahmen über die Vertheilung der Moleküle einführt[17]).

Wie schon oben bemerkt stehen die durchgeführten Beobachtungen im allgemeinen mit dem Poisson-Cauchy'schen Relationen (55) und somit auch mit den ihnen zu Grunde liegenden Vorstellungen im Widerspruch; die Abhängigkeit der wechselwirkenden Kräfte von der gegenseitigen Orientirung der Moleküle kann also nicht aufgegeben werden. Es scheint aber möglich, daß Specialisirungen anderer Art auf Relationen führen, die wenigstens in einzelnen Fällen von der Beobachtung bestätigt werden.

10) **Die Dilatationscomponenten.** Vergleicht man die Definitionen (40) der sechs Functionen $x_x, \dots x_y$ mit den Formeln (23) auf S. 124 für Tensorcomponenten, so erkennt man, daß nicht $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$, sondern vielmehr

$$x_x,\ y_y,\ z_z,\ \tfrac{1}{2}y_z,\ \tfrac{1}{2}z_x,\ \tfrac{1}{2}x_y$$

Tensorcomponenten sind. Man könnte zweifeln, ob es deshalb nicht besser wäre, so, wie das z. B. Christiansen[18]) thut, die Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

mit y_z, z_x, x_y zu bezeichnen. Indessen würden damit die so symmetrischen Formeln (41) und (54) eine unliebsame Aenderung erfahren, indem dann $2Y_z, 2Z_x, 2X_y$ an die Stelle von Y_z, Z_x, X_y träten

und die Formeln sonach statt der Tensorcomponenten zweiter Art das Doppelte von ihnen angäben. Die bei y_z, z_x, x_y beseitigte 2 träte demgemäß also bei den Y_z, Z_x, X_y wieder auf; die Unsymmetrie wäre nur an eine andere Stelle gebracht.

Durchaus symmetrische Formeln erhält man überhaupt nur, wenn man statt der bisher benutzten Tensorcomponenten A, B, C, A', B', C' das orthogonale System A, B, C, rA', rB', rC', wo $r = \sqrt{2}$ ist, einführt. Dem würden in unserm Falle die beiden Componentensysteme

$$X_x, Y_y, Z_z, rY_z, rZ_x, rX_y$$

und $$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

entsprechen. Aber der Factor oder Nenner $r = \sqrt{2}$, der hiernach in den verschiedensten Formeln auftreten würde, sowie die wenig anschauliche Bedeutung dieser Componenten zweiter Art hält doch davon zurück, diese aus rein formalen Gründen gewiß empfehlenswertheste Verfügung zu treffen.

Wir behalten demgemäß die einmal getroffene Festsetzung bei und haben dadurch zugleich den Vortheil, mit ziemlich vielen Autoren in Uebereinstimmung zu bleiben.

Was die geometrische Bedeutung der Functionen $x_x, \dots x_y$ anbetrifft, so ist bekannt, daß für jede Stelle des Körpers x_x, y_y, z_z die lineären Dilatationen parallel den Coordinatenaxen und y_z, z_x, x_y die Verkleinerungen der Winkel zwischen zwei Linienelementen darstellen, die vor der Deformation den in den Symbolen hervorgehobenen Coordinatenaxen parallel waren. Das Tensortripel, dessen Componenten die Größen $x_x, \dots \frac{1}{2} x_y$ sind, wird daher durch drei lineäre Dilatationen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in denjenigen drei zu einander normalen Richtungen, deren Winkel sich durch die Deformation nicht ändern, dargestellt. Man nennt diese Dilatationen gewöhnlich die Hauptdilatationen, man wird also das Tripel $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ als das der Hauptdilatationen oder kürzer als Dilatationstripel bezeichnen. Für die $x_x, \dots \frac{1}{2} x_y$ ergeben sich dann von selbst die Namen Dilatationscomponenten, — den man mit einer kleinen Ungenauigkeit auch auf das System der $x_x, \dots x_y$ anwenden kann.

Um darauf zurückgreifen zu können mögen hier noch einige für die Beobachtung wichtige Deformationen in ihren durch die Dilatationscomponenten bestimmten Werthen angegeben werden.

Die räumliche Dilatation ϑ ist gegeben durch

56) $$\vartheta = x_x + y_y + z_z,$$

die Flächendilatation Θ_z normal zur Z-Axe durch

57) $$\Theta_z = x_x + y_y;$$

die lineäre Dilatation δ in einer Richtung, deren Winkel gegen die Coordinatenaxen ursprünglich die Cosinus α, β, γ besitzen, lautet

58) $$\delta = x_x\alpha^2 + y_y\beta^2 + z_z\gamma^2 + y_z\beta\gamma + z_x\gamma\alpha + x_y\alpha\beta;$$

die Vergrößerung η des Winkels zwischen den Normalen zweier Ebenen, welche ursprünglich die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ besitzen, ist gegeben durch

59) $$\eta \sin\varphi = 2(x_x\alpha_1\alpha_2 + y_y\beta_1\beta_2 + z_z\gamma_1\gamma_2) \\ + y_z(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + z_x(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) + x_y(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) - (\delta_1 + \delta_2)\cos\varphi$$

worin δ_1 und δ_2 die lineären Dilatationen in den ursprünglichen Richtungen der beiden Normalen sind, und φ den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen bezeichnet.

Fallen diese Normalen in zwei Coordinatenaxen (z. B. Y und Z), so wird η der bezüglichen Dilatationscomponente (z. B. also y_z) gleich.

11) **Die Parameter der Krystallelasticität**[19]. Die allgemeinen Ausdrücke (41) der Druckcomponenten in den Dilatationscomponenten enthalten, wie S. 134 gesagt, 21 der Substanz und dem benutzten Coordinatensystem individuelle Parameter. Man nennt dieselben die Elasticitätsconstanten, seltener die Elasticitätscoefficienten der Substanz. Gegen diese Namen könnte man einen berechtigten Einwand auf Grund seiner absoluten Farblosigkeit erheben. Bezeichnender und dabei in vollständiger Analogie zu der Nomenclatur, die im Bereiche der Wärme- und Electricitätsleitung üblich ist, wäre der Name der elastischen Widerstandscoefficienten.

Wenn nun auch bei dem Fundamentalsystem (41) der neutrale Name der Elasticitätsconstanten wohl kaum mehr beseitigt werden kann, so würde es sich doch sehr empfehlen, bei allen Gesetzen, welche eine elastische Veränderung — sei es nun die einer Länge, eines Winkels, einer Fläche, eines Volumens — durch eine ausgeübte Kraft ausdrücken, das im Nenner der Kraft auftretende Aggregat der c_{hk}, das stets die Dimension einer Elasticitätsconstante besitzt, als den elastischen Widerstand gegen die betreffende Veränderung zu bezeichnen. So würde z. B. in der bekannten Formel für die Längsdehnung eines Stabes durch ein Gewicht P

60) $$\delta L = PL/EQ$$

der (sonst Elasticitätscoefficient oder Young'scher Modul genannte) Nenner E als der (specifische) Dehnungswiderstand des Stabes zu bezeichnen sein. —

Die Auflösung der Gleichungen (41) nach den Dilatationscomponenten liefert Ausdrücke, die wir schreiben

61) $$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y,$$

. . . .

Die s_{hk} bezeichnen hierin gewisse Determinantenverhältnisse der c_{hk}, zwischen denen wegen $c_{hk} = c_{kh}$ die Beziehungen

62) $$s_{hk} = s_{kh}$$

bestehen und ihre Zahl auf 21 reduciren.

Diese zu (41) reciproken Formeln (61) bilden den Ausgangspunkt für die Theorie der practisch wichtigsten Deformationen, sie bilden demgemäß auch die Grundlage für die Theorie aller wichtigen Beobachtungsmethoden; die Messungen führen sonach auch stets zuerst auf die Parameter s_{hk}, aus denen sich die eigentlichen Elasticitätsconstanten c_{hk} erst durch häufig sehr umständliche Rechnungen bestimmen. Da bei derartigen Rechnungen der wahrscheinliche Fehler der Bestimmung außerordentlich wächst, so erscheint es rationell, die elastischen Medien lieber durch ihre s_{hk} statt durch ihre c_{hk} zu characterisiren.

Die aus dem Gesagten erhellende große Bedeutung der neuen Parameter rechtfertigt, ihnen einen besonderen Namen zu ertheilen. Da die s_{hk} als Proportionalitätsconstanten in den Werthen der Dilatationscomponenten diese letzteren messen, so hat Referent für sie den Namen der Elasticitätsmoduln vorgeschlagen[19]), der in Deutschland bereits einigermaßen eingeführt ist.

Ueberhaupt empfiehlt es sich, wenn eine beobachtbare elastische Veränderung durch eine ausgeübte Kraft ausgedrückt ist, das als Factor dieser Kraft auftretende Aggregat der c_{hk} oder s_{hk}, das stets die Dimension eines Elasticitätsmoduls hat, den Modul der betreffenden Veränderung zu nennen. Schreibt man beispielsweise die Gleichung (60) für die Längsdehnung eines Stabes in der Form

63) $$\delta L = DPL/Q,$$

so würde D den Modul der Längsdehnung (bei einseitigem Zug) für den betreffenden Stab darstellen.

Elastische Moduln und elastische Widerstände sind hiernach in derselben Weise zu einander reciprok, wie Widerstände und Leitfähigkeiten bei Wärme- oder Electricitätsleitung. —

In (53) ist der Ausdruck des elastischen Potentiales in den Dilatationscomponenten angegeben; seine Parameter sind die Elasticitätsconstanten. Mit Hülfe der Gleichungen (61) kann man

zunächst die in den beiden Arten von Tensorcomponenten symmetrische Form

$$-2f = X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y \tag{64}$$

bilden (die man mit dem Ausdruck (21) auf S. 8 vergleichen möge) und gewinnt aus ihr sogleich auch

$$\begin{aligned} 2f = s_{11} X_x^2 &+ 2s_{12} X_x Y_y + 2s_{13} X_x Z_z + \cdots + 2s_{16} X_x X_y \\ &+ s_{22} Y_y^2 \quad + 2s_{23} Y_y Z_z + \cdots + 2s_{26} Y_y X_y \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{aligned} \tag{65}$$

Als Anzahl der Elasticitätsmoduln und -constanten erscheint im Vorstehenden ein und zwanzig. Es mag indessen bemerkt werden, daß eine solche Zählung nach einem andern Grundsatz vorgenommen ist, als die, welche die Anzahl der Leitfähigkeits- oder Widerstandscoefficienten bei Wärme und Electricität zu drei ergiebt. Die erstere Zählung setzt ein beliebiges, die letztere ein ganz specielles Coordinatensystem — das System der Hauptaxen — voraus; für beliebige Systeme ist die Anzahl der thermischen und electrischen Constanten gleich sechs, das Hauptaxensystem ist dadurch definirt, daß für dasselbe drei Constanten verschwinden.

Man kann auch die Gleichungen (41) resp. (61) auf ein specielles resp. Hauptaxensystem beziehen, das durch drei Relationen zwischen den betreffenden Parametern definirt ist. Die Anzahl der letzteren reducirt sich hierdurch von einundzwanzig auf achtzehn. Es versteht sich von selbst, daß, wenn das Hauptaxensystem durch drei Beziehungen zwischen den Elasticitätsconstanten einmal festgelegt ist, dann nur die hieraus folgenden Gleichungen zwischen den Moduln, und keine anderen, eingeführt werden dürfen; ebenso umgekehrt. Die elastischen Hauptaxen mögen mit X_0, Y_0, Z_0, die auf sie bezogenen elastischen Haupt-Parameter mit c_{hk}^0 und s_{hk}^0 bezeichnet werden. Ueber die Grundsätze, nach denen man bei der Wahl eines elastischen Hauptaxensystemes verfahren wird, soll weiter unten gesprochen werden.

Die Einführung des Hauptcoordinatensystemes ist von wesentlichem Nutzen besonders bei gewissen allgemeinen Untersuchungen. Für die Behandlung specieller Probleme z. B. der Deformation eines in beliebiger Orientirung aus einem Krystall geschnittenen Stabes ist es aber meist vortheilhafter, das Coordinatensystem X, Y, Z so zu wählen, daß die Oberflächenbedingungen des Problems eine besonders einfache Gestalt annehmen. Es handelt sich in solchen Fällen darum, die Parameter s_{hk} und c_{hk}, die sich auf das

beliebige System X, Y, Z beziehen und, wo es die Deutlichkeit verlangt, als die Nebenparameter bezeichnet werden mögen, durch die für das Hauptsystem X_0, Y_0, Z_0 geltenden auszudrücken.

Dies Problem löst man am einfachsten mit Hülfe des elastischen Potentiales f, das in (53) durch die Dilatations-, in (65) durch die Druckcomponenten ausgedrückt ist, und das man zunächst auf die Hauptaxen X_0, Y_0, Z_0 bezogen aufstellt. Transformirt man dann mit Hülfe der bekannten Transformationseigenschaften der Tensorcomponenten die Druck- oder die Dilatationscomponenten auf das beliebige Coordinatensystem X, Y, Z, so erhält man eine mit (53) resp. (65) gleichgestaltete Form, wo nur an Stelle der c_{hk} resp. s_{hk} lineäre Functionen aller c^0_{hk} resp. s^0_{hk} stehen.

Die so resultirenden Beziehungen zwischen den beiden Arten von Parametern sind im allgemeinen sehr complicirt. Es genüge die für die Anwendungen allein wichtigen Formeln für die Moduln anzugeben. Bezeichnet man das, was aus den Coefficienten δ_{mn} in (15) resp. (16) auf S. 123 wird, wenn man in den ersten drei Verticalreihen r mit 2, in den letzten mit 1 vertauscht, durch d_{mn}, so drücken sich die Nebenmoduln durch die Hauptmoduln folgendermaßen aus[20]):

66) $$s_{hk} = \sum_m \sum_n s^0_{mn} d_{mh} d_{nk}, \quad \left.\begin{matrix} h, k \\ m, n \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3 \,.\,.\, 6.$$

Für die Constanten gelten Gleichungen von derselben Form mit theilweise geänderter Bedeutung der Factoren d.

Thesen.

Eine nach allen Richtungen hin bequeme Definition der die Deformation bestimmenden Argumente scheint nicht möglich zu sein. Die Kirchhoff'sche Festsetzung dürfte wegen ihrer Anschaulichkeit und Beweglichkeit, wegen ihrer Analogie zu den Neumann'schen Symbolen der Druckcomponenten und wegen der Symmetrie der in ihnen ausgedrückten Formeln den Vorzug verdienen.

Es liegt kein Grund vor, so wie gewöhnlich geschieht, die Elasticitätsconstanten gegenüber den Elasticitätsmoduln zu bevorzugen. Aus diesem Grunde hat auch eine Bezeichnung der Elasticitätsconstanten, die nichts weiter ausdrückt, als die Stelle jeder einzelnen im Potential, keine Berechtigung.

Bei speciellen, zur Vergleichung mit der Beobachtung dienenden Gesetzen ist es erwünscht, die von den elastischen Parametern abhängigen Factoren je nach ihrer Stellung als Widerstände oder als Moduln unzweideutig zu characterisiren.

IV. Einführung der Symmetrieelemente der Krystalle.

12) **Die unabhängigen Symmetrieelemente der 32 Krystallgruppen.** Die Grundlage für die Specialisirung der obigen allgemeinen Ansätze auf die einzelnen Krystallgruppen ist die aus der Erfahrung geschlossene und zuerst wohl von Fr. Neumann nachdrücklich ausgesprochene Regel[21]), daß jedes Symmetrieelement, das sich in den Wachsthums- und Auflösungserscheinungen eines Krystalles offenbart, auch bei allen übrigen an ihm stattfindenden physikalischen Vorgängen zur Geltung kommt.

Da aus den speciellen Gesetzen dieser Vorgänge mitunter noch weitere Symmetrieelemente erwachsen, die sich bei ihnen den Elementen der Formbildung superponiren, so kann man diese hypothetische Regel auch dahin aussprechen, daß von allen physikalischen Vorgängen an einem Krystalle diejenigen des Wachsthums und der Auflösung die niedrigste Symmetrie besitzen.

Nach diesem Satz ist es also nicht möglich, aus der Symmetrie irgend einer andern physikalischen Eigenschaft die vollständige Symmetrie der Formbildung eines Krystalles abzuleiten, — wie das gelegentlich versucht worden ist.

Die ersten Anwendungen der dargelegten Regel auf die Krystallelasticität sind von Fr. Neumann selbst gemacht und in vereinfachter Form von Kirchhoff[22]) wiederholt. Es handelte sich dabei, weil Beobachtungen noch ganz fehlten, nur um die Zusammenstellung der wichtigsten Beispiele. Die Zahl der letzteren ist dann vom Referenten[23]) und von Aron[24]) vermehrt worden. Eine systematische Bearbeitung der Frage hat zuerst Minnigerode[25]) ausgeführt; aber die Hülfsmittel der Gruppentheorie, die er heranzieht, stehen einigermaßen außer Verhältniß zu dem im Grunde einfachen Problem. Es soll im Nachstehenden gezeigt werden, wie die Formeln der Elasticitätstheorie (und ähnlich auch die der verwandten Gebiete der Krystallphysik) für alle Krystallgruppen mit ganz elementaren Hülfsmitteln abgeleitet werden können. Der Raum gebietet dabei die Beschränkung auf eine blose Skizze, die aber immerhin eine Anschauung von den in Betracht kommenden Verhältnissen geben dürfte.

Das Wesen der Symmetrie der Form besteht bekanntlich darin, daß der durch geeignete Reduction seiner zufälligen Längsdimensionen auf eine bestimmte Normalform zurückgeführte Krystall durch gewisse geometrische Operationen (Drehung, Spiegelung,

Inversion) mit sich selbst derartig zur Deckung gebracht werden kann, daß Richtungen der ersten Position stets mit solchen Richtungen der zweiten Position zusammenfallen, die hinsichtlich der Wachsthums- und Auflösungserscheinungen ihnen gleichwerthig sind.

Die im Eingang erörterte Regel geht nun dahin, daß die formal gleichwerthigen Positionen auch physikalisch gleichwerthig sind, sodaß zwei primäre, ursächliche Einwirkungen (z. B. zwei Deformationen), die bei den beschriebenen Bewegungen zur Deckung gelangen, jederzeit zwei secundäre Vorgänge (z. B. zwei Drucksysteme) zur Folge haben, von denen Gleiches gilt.

Zur bequemen Anwendung dieser Regel in den verschiedenen Gebieten der Krystallphysik ist es vortheilhaft, ein für alle Male eine Tabelle der die verschiedenen Krystallgruppen characterisirenden, von einander unabhängigen Symmetrieelemente zu entwerfen[26]). Nur diese Elemente kommen für physikalische Betrachtungen zur Anwendung; die Zusammenstellung sämmtlicher in einer Krystallgruppe auftretenden ist allein für den Krystallographen von Nutzen, wirkt aber unsern Aufgaben gegenüber eher verwirrend als aufklärend.

Bezüglich der Characterisirung der verschiedenen Symmetrieelemente muß auf irgend ein Lehrbuch der Krystallographie verwiesen werden. Wir bezeichnen das Vorhandensein eines Symmetriecentrums durch das Symbol C, dasjenige einer n-zähligen Symmetrieaxe oder Spiegelaxe durch das Symbol A^n oder S^n, dasjenige einer Symmetrieebene durch E.

Wir setzen ein Hauptaxensystem X_0, Y_0, Z_0 voraus, dessen Axen nach Möglichkeit mit Symmetrie- oder Spiegelaxen des Krystalles zusammenfallen, oder auf Symmetrieebenen senkrecht stehen; diejenige Coordinatenaxe, welche mit einem dieser Symmetrieelemente in dem genannten Zusammenhang steht, wird durch den untern Index an dem Symbol des Elementes hervorgehoben. So bedeutet A_z^3, daß die Z-Coordinatenaxe eine dreizählige Symmetrieaxe ist, E_x, daß die X-Coordinatenaxe senkrecht zu einer Symmetrieebene steht. Besitzt die Krystallgruppe eine ausgezeichnete Symmetrieaxe, so wird in diese jederzeit die Z-Axe gelegt; in zweiter Linie wird stets die X-Axe bevorzugt.

Anschließend an das S. 141 Gesagte mag bemerkt werden, daß für alle Krystallgruppen, in denen nach den soeben erörterten Grundsätzen das Hauptcoordinatensystem vollständig festgestellt ist, hierdurch eben jene S. 141 erwähnten drei Beziehungen zwischen ihren elastischen Parametern bereits eingeführt sind, welche deren Zahl von 21 auf 18 reduciren. Es wird sich zeigen, daß nur in

zwei Gruppen das Hauptaxensystem nach dem eben Bestimmten noch ganz willkürlich bleibt, daß in drei anderen blos eine seiner Axen festgelegt ist. Das rein krystallographische Verfahren zur Festsetzung des elastischen Hauptcoordinatensystemes reicht somit in den bei weitem meisten Fällen aus.

Was die Anordnung der 32 Krystallgruppen angeht, so schließen wir uns dabei wie früher einem von Herrn Schönflies[27]) gemachten Vorschlag an, der sehr glücklich zu sein scheint.

Bei den holoëdrischen Gruppen einiger Systeme finden sich zwei verschiedene Angaben über die unabhängigen Symmetrieelemente. Dieselben sind gleichwerthig, weil, wie leicht erkennbar, ein Symmetriecentrum, eine Symmetrieebene und eine normal dazu stehende zweizählige Symmetrieaxe sich derartig gegenseitig bedingen, daß die Anwesenheit von zweien dieser Elemente diejenige des dritten fordert. Die beiden gleichwerthigen Fassungen sind deshalb in die Tabelle eingestellt, um den Zusammenhang der nicht holoëdrischen Gruppen mit den holoëdrischen klarer hervortreten zu lassen.

1) Allgemeine unabhängige Symmetrieelemente.

Triclines System.

1. Holoëdrie C.
2. Hemiëdrie —

Monoclines System.

3. Holoëdrie CA_z^2 oder CE_z.
4. Hemiëdrie E_z.
5. Hemimorphie A_z^2.

Rhombisches System.

6. Holoëdrie $CA_z^2 A_x^2$ oder $CA_z^2 E_x$.
7. Hemiëdrie $A_z^2 A_x^2$.
8. Hemimorphie $A_z^2 E_x$.

Rhomboëdrisches System.

9. Holoëdrie $CA_z^3 A_x^2$ oder $CA_z^3 E_x$.
10. Enantiomorphe Hemiëdrie $A_z^3 A_x^2$.
11. Hemimorphe Hemiëdrie $A_z^3 E_x$.
12. Paramorphe Hemiëdrie CA_z^3.
13. Tetartoëdrie A_z^3.

Tetragonales System.

14. Holoëdrie $CA_z^4 A_x^2$ oder $CA_z^4 E_x$.
15. Enantiomorphe Hemiëdrie $A_z^4 A_x^2$.
16. Hemimorphe Hemiëdrie $A_z^4 E_x$.
17. Paramorphe Hemiedrie CA_z^4.
18. Tetartoëdrie A_z^4.

19. Hemiëdrie mit Spiegelaxe $S^2_z A^2_x$.
20. Tetartoëdrie mit Spiegelaxe S^2_z.

Hexagonales System.

21. Holoëdrie $CA^6_z A^2_x$ oder $CA^6_z E_x$.
22. Enantiomorphe Hemiëdrie $A^6_z A^2_x$.
23. Hemimorphe Hemiëdrie $A^6_z E_x$.
24. Paramorphe Hemiëdrie CA^6_z.
25. Tetartoëdrie A^6_z.
26. Hemiëdrie mit dreizähliger Axe $A^3_z E_z A^2_x$.
27. Tetartoëdrie mit dreizähliger Axe $A^3_z E_z$.

Reguläres System.

28. Holoëdrie $CA^4_z A^4_x$.
29. Enantiomorphe Hemiëdrie $A^4_z A^4_y$.
30. Hemimorphe Hemiëdrie $S^2_x S^2_y$.
31. Paramorphe Hemiëdrie $CA^2_x \sim A^2_y \sim A^2_z$.
32. Tetartoëdrie $A^2_x \sim A^2_y \sim A^2_z$.

Bei den letzten beiden Gruppen ist durch das Zeichen $\sim$ die Gleichwerthigkeit der drei zueinander normalen Symmetrieaxen angedeutet.

Die vorstehende Tabelle giebt eine deutliche Anschauung davon, wie überaus mannigfaltige und dabei doch einfache und übersichtliche Verhältnisse die Grundlagen der krystallphysikalischen Untersuchungen bilden. —

Die Anwendung des im Eingang erörterten Grundsatzes zur Specialisirung irgend eines allgemeinen Ansatzes auf die speciellen Krystallgruppen ist dann besonders einfach, wenn jener Ansatz sich auf eine einzige scalare Function reduciren läßt. Wie eine solche Function unter Umständen auch da einzuführen ist, wo es sich im Grunde um Vectoren oder Tensoren handelt, ergiebt sich aus dem S. 124 Gesagten.

Im Falle der Elasticität sind uns scalare Functionen mit physikalischer Bedeutung, welche die angedeutete Operation gestatten, bereits oben entgegengetreten. Auf S. 135 ist das elastische Potential Φ im weiteren Sinne des Wortes eingeführt; ebenda ist es in drei Theile φ, ψ, χ verschiedenen Characters zerlegt, die natürlich, ebenso wie Φ, Scalare sind, und schließlich ist aus ihm das elastische Potential f im engern Sinne des Wortes abgeleitet. φ und f haben die gleiche Form und unterscheiden sich nur durch die Werthe ihrer Parameter.

Alle diese Functionen ändern ihre Vorzeichen nicht, wenn man die Richtungen aller Coordinatenaxen umkehrt.

Von φ, χ, f ist dies nach ihren in (47), (49), (53) enthaltenen Definitionen ohne Weiteres ersichtlich; es gilt aber auch von ψ, das nach (48) eine in $x_x, \ldots x_y$ und $l-\lambda$, $m-\mu$, $n-\nu$ bilineare Gestalt hat, weil seine beiden Arten von Argumenten für sich die Eigenschaft besitzen, bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Vorzeichen zu bewahren.

Nach dem S. 143 Gesagten superponirt sich also sowohl bei den sichtbaren Vorgängen der Elasticität als auch bei den sie begleitenden unsichtbaren Molekulardrehungen den krystallographischen Symmetrieelementen jederzeit ein Symmetriecentrum. In Folge hiervon vereinfacht sich die vorstehende Tabelle erheblich; eine bedeutende Anzahl von Gruppen wird elastisch gleichwerthig und rückt sonach zu Obergruppen zusammen. Denn einerseits sind Symmetrieebenen jetzt mit zu ihnen normalen zweizähligen Symmetrieaxen aequivalent, andererseits auch Spiegelaxen mit Symmetrieaxen von doppelter Zähligkeit. Indem wir das allen Gruppen gemeinsame und für uns unwesentliche Symbol C fortlassen, gelangen wir hiernach zu der folgenden Zusammenstellung[28]).

2) Unabhängige Symmetrieelemente für Vorgänge mit Symmetriecentrum.

Triclines System.

(1, 2) kein Symmetrieelement.

Monoclines System.

(3, 4, 5) A_z^2.

Rhombisches System.

(6, 7, 8) $A_z^2 A_x^2$.

Rhomboëdrisches System.

(9, 10, 11) $A_z^3 A_x^2$.

(12, 13) A_z^3.

Tetragonales System.

(14, 15, 16, 19) $A_z^4 A_x^2$.

(17, 18, 20) A_z^4.

Hexagonales System.

(21, 22, 23, 26) $A_z^6 A_x^2$.

(24, 25, 27) A_z^6.

Reguläres System.

(28, 29, 30) $A_z^4 A_y^4$.

(31, 32) $A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2$.

Die 32 Krystallgruppen ziehen sich also in Bezug auf Vorgänge mit Symmetriecentrum in 11 Ober-

gruppen zusammen, die sämmtlich allein durch ihre Symmetrieaxen characterisirt sind.

13) **Specialisirung des elastischen Potentiales für die verschiedenen Krystallgruppen.** Wir knüpfen die nächsten Betrachtungen an die Function f an, die durch (53) in den Elasticitätsconstanten, durch (65) in den Elasticitätsmoduln ausgedrückt ist.

Zum Zweck ihrer Specialisirung für die einzelnen Krystall-Obergruppen verfährt man am besten so, daß man die für ihre Parameter c_{hk} resp. s_{hk} geltenden Beziehungen zunächst in den einfachsten Fällen aufsucht, wo nur eine Axe, etwa die Z-Axe, die Natur einer n-zähligen Symmetrieaxe hat. Dies geschieht dadurch, daß man das Potential auf ein neues Coordinatensystem transformirt, das in Bezug auf die Symmetrieaxe A^n um den Winkel $2\pi/n$ gegen das ursprüngliche gedreht ist, und den so erhaltenen Ausdruck dem ursprünglichen gliedweise gleichsetzt. Dies kommt einfach darauf hinaus, daß man die allgemeinen Transformationsformeln für die Constanten und die Moduln auf die beschriebene Drehung des Coordinatensystems anwendet und jedes so erhaltene c_{hk} oder s_{hk} dem auf das ursprüngliche System bezogenen c^0_{hk} oder s^0_{hk} gleichsetzt. Für die Moduln stellt (66) die nöthige Transformationsformel dar; die für die Constanten gültige unterscheidet sich von ihr in leicht erkennbarer Weise durch theilweise geänderte Werthe der Coefficienten d_{mn}.

Hat man so für $n = 2, 3, 4, 6$ eine Tabelle der für die Parameter geltenden Bestimmungen entworfen, so kann man von der Z- zur X-Axe übergehen, indem man in allen diesen Gleichungen die Indices 1, 2, 3 und 4, 5, 6 in sich um eine Einheit cyclisch ändert; erforderlich ist diese Operation nach der letzten Tabelle nur für $n = 2$ und 4. Ebenso gelangt man (für $n = 2$) zu den für die Y-Axe als Symmetrieaxe geltenden Formeln.

Mit Hülfe dieser Beziehungen kann man nun ohne alle Rechnung die Systeme der auf das Hauptaxensystem X_0, Y_0, Z_0 bezogenen Parameter, Hauptconstanten c^0_{hk} und Hauptmoduln s^0_{hk}, für eine jede der 11 Obergruppen bilden, indem man nur die für die einzelnen Symmetrieelemente geltenden Formeln combinirt. Bei der letzten Obergruppe (31, 32) ist außerdem noch der Gleichwerthigkeit der drei Coordinatenaxen dadurch Rechnung zu tragen, daß man die durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 resp. 4, 5, 6 in einander übergehenden Parameter c^0_{hk} resp. s^0_{hk} einander gleichsetzt.

Der Raum gestattet nicht, das ganze System der 11 Obergruppen in Tabelle 2 durch ihre c^0_{hk} und s^0_{hk} zu charakterisiren. Doch mögen gewisser Anwendungen wegen die Constanten für die

vier Fälle mitgetheilt werden, daß die Z-Axe eine 2, 3, 4, 6-zählige Symmetrieaxe ist.

3) Systeme der Elasticitätsconstanten und -moduln bei Existenz verschiedener Symmetrieaxen.

$$A^2_z \quad \begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & s_{26} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{array}$$

$$A^3_z \quad \begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & c_{25} \\ & & & & c_{44} & c_{14} \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & -s_{25} & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & s_{25} & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 2s_{25} \\ & & & & s_{44} & 2s_{14} \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{array}$$

$$A^4_z \quad \begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{16} \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{array}$$

$$A^6_z \quad \begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{array}$$

Hieraus folgt z. B. für die durch das gleichzeitige Auftreten von A^3_z und A^2_x ausgezeichnete Obergruppe (9, 10, 11) das Schema:

$$A^3_z, A^2_x \quad \begin{array}{cccccc} c^0_{11} & c^0_{12} & c^0_{13} & c^0_{14} & 0 & 0 \\ & c^0_{11} & c^0_{12} & -c^0_{14} & 0 & 0 \\ & & c^0_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c^0_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c^0_{44} & c^0_{14} \\ & & & & & \frac{1}{2}(c^0_{11}-c^0_{12}) \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} s^0_{11} & s^0_{12} & s^0_{13} & s^0_{14} & 0 & 0 \\ & s^0_{11} & s^0_{13} & -s^0_{14} & 0 & 0 \\ & & s^0_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s^0_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s^0_{44} & 2s^0_{14} \\ & & & & & 2(s^0_{11}-s^0_{12}) \end{array}$$

Die Durchführung der analogen Operation bei allen 11 Obergruppen der Tabelle auf S. 147 ergiebt, daß sich von ihnen zwei Mal zwei gleich verhalten, und daß somit in Bezug auf das elastische Potential f

nur neun verschiedene Obergruppen existiren. Ihre Constantenzahlen sind die folgenden:

Triclines	System	(1, 2)	21	Constanten
Monoclines	„	(3, 4, 5)	13	„
Rhombisches	„	(6, 7, 8)	9	„
Rhomboëdrisches	„	(9, 10, 11)	6	„
„	„	(12, 13)	7	„
Tetragonales	„	(14, 15, 16, 19)	6	„
„	„	(17, 18, 20)	7	„
Hexagonales	„	(21 bis 27)	5	„
Reguläres	„	(28 bis 32)	3	„

Die vorstehenden Schemata gestatten mit Leichtigkeit auch die speciellen Formen der Ausdrücke für die Druck- resp. Dilatationscomponenten (41) und (61) für die einzelnen Gruppen zu bilden. Z. B. nimmt für die wichtige Obergruppe (9, 10, 11) das System (61) die folgende Gestalt an

67)
$$\begin{aligned}
-x_x^0 &= s_{11}^0 X_x^0 + s_{12}^0 Y_y^0 + s_{13}^0 Z_z^0 + s_{14}^0 Y_z^0,\\
-y_y^0 &= s_{12}^0 X_x^0 + s_{11}^0 Y_y^0 + s_{13}^0 Z_z^0 - s_{14}^0 Y_z^0,\\
-z_z^0 &= s_{13}^0 X_x^0 + s_{13}^0 Y_y^0 + s_{33}^0 Z_z^0,\\
-y_z^0 &= s_{14}^0 X_x - s_{14}^0 Y_y + s_{44}^0 Y_z^0,\\
-z_x^0 &= s_{44}^0 Z_x^0 + 2 s_{14}^0 X_y^0,\\
-x_y^0 &= 2 s_{14}^0 Z_x^0 + 2 (s_{11}^0 - s_{12}^0) X_y^0.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, daß nach der Tabelle auf S. 149 die Schemata der Elasticitätsconstanten von denen der -moduln abweichen. Dieser (kleine) Uebelstand ist eine directe Folge der gebräuchlichen Definitionen der Druck- und der Dilatationscomponenten. Er läßt sich vermeiden durch die Benutzung der auf S. 138 besprochenen orthogonalen Componenten X_x, Y_y, Z_z, rY_z, rZ_x, rX_y und x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r, die bei allgemeinen Untersuchungen sich auch mitunter empfehlen [29]). Für specielle physikalische Probleme wird man indessen nach dem S. 138 Gesagten die gebräuchliche Darstellung kaum verlassen. —

Es mag hervorgehoben werden, daß die im Vorstehenden skizzirte Methode, wie auf das elastische Potential f, so auch auf die S. 135 eingeführten Functionen φ, ψ, χ angewendet werden kann. Die letzteren beiden haben ein besonderes Interesse, weil sie nach den Gleichungen (52) die Drehungen der Moleküle innerhalb der Volumenelemente bei den gewöhnlichen elastischen Deformationen bestimmen.

Für die durch $A_z^2 A_z^2$ characterisirte Obergruppe (9, 10, 11) gelten z. B. für die Constanten β_{hk} und γ_{hk} folgende Schemata:

$$\begin{array}{cccccc} \beta_{11} & -\beta_{11} & 0 & \beta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} & -\beta_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ & \gamma_{11} & 0 \\ & & \gamma_{33}. \end{array}$$

Hieraus ergeben sich nach (52) folgende Gesetze für die Molekulardrehungen

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(l-\lambda)+\beta_{11}(x_x-y_y)+\beta_{14}y_z &= 0 \\ \gamma_{11}(m-\mu)-\beta_{14}z_x-\beta_{11}x_y &= 0 \\ \gamma_{33}(n-\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Um die dreizählige Symmetrieaxe drehen sich also die Moleküle nur mit dem Volumenelement. Im Uebrigen hängt der Vorgang von zwei Constanten β_{11}/γ_{11} und β_{14}/γ_{11} ab, die aus Elasticitätsbeobachtungen nicht ableitbar sind.

Erscheinungen, aus denen auf die Größe der Molekulardrehungen quantitative Schlüsse zu ziehen wären, sind bisher nicht bekannt; die Vorgänge bei der Bildung von Gleitflächen hängen aber vermuthlich mit ihnen zusammen, auch spielen sie jedenfalls bei den Erscheinungen der Piëzoelectricität und der Electrostriction eine Rolle. Außerdem zeigt die Theorie, daß, wenn man die Trägheitsmomente der als Moleküle bezeichneten Elementarmassen nicht verschwindend klein annimmt, sondern in den Formeln (36) berücksichtigt, gewisse Schwingungen in Krystallen eine von der Periode abhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhalten. Ob diese aller Wahrscheinlichkeit nach sehr geringe Abhängigkeit sich einmal wird beobachten lassen, steht dahin.

Thesen.

Für die Zwecke der Krystallphysik genügt die Berücksichtigung allein der von einander unabhängigen Symmetrieelemente.

Durch die getroffenen Festsetzungen über Druck- und Dilatationscomponenten nehmen die Schemata der Elasticitätsconstanten von denen der Moduln abweichende Formen an. Dieselben lassen sich durch Einführung der S. 138 definirten orthogonalen Componenten zur Uebereinstimmung bringen. Ein solches Verfahren bietet aber in anderer Hinsicht solche Unbequemlichkeiten, daß es nicht empfohlen werden kann.

V. Abriss der Theorie der Beobachtungsmethoden.

14) **Allgemeine Aufgaben der Beobachtungen über Krystallelasticität.** Die erste Aufgabe, die der Beobachtung in Betreff der Elasticitätsverhältnisse der Krystalle gestellt werden konnte und ihr factisch gestellt worden ist, galt der Entscheidung, ob sich die Krystalle nach der Seite der Elasticität

wirklich von isotropen Körpern merklich unterscheiden. Diese Frage ist bekanntlich durch die Beobachtungen Savarts[30]) über die Klangfiguren auf Platten von Bergkrystall seit langer Zeit im bejahenden Sinne entschieden worden. Der bloße Nachweis, daß eine kreisförmige parallel der optischen Axe hergestellte Scheibe verschiedene Klangfiguren ergab, wenn die gleiche Erregungsart an verschiedenen Randstellen vorgenommen wurde, stellte ohne alle Messungen die elastische Anisotropie des Materiales fest. Weitergehende theoretische Schlüsse vermochte übrigens Savart aus seinen Beobachtungen schon deshalb nicht zu ziehen, weil die Grundformeln der Elasticität für ein Material wie Bergkrystall damals noch nicht gefunden waren.

Nachdem die elastische Anisotropie der Krystalle einmal sichergestellt war, stellte sich das Bedürfniß nach zahlenmäßigen Bestimmungen heraus, und dies um so mehr, als inzwischen die Theorie, auf den zwei im II. Theil entwickelten verschiedenen Grundlagen aufgebaut, zu verschiedenen Endresultaten gelangt war. Die messende Beobachtung hatte nun offenbar zuerst folgende Frage zu beantworten.

a) Umfaßt die allgemeinste aufgestellte 21-constantige Theorie alle Beobachtungen, oder verlangen letztere zu ihrer Darstellung noch weiter verallgemeinerte Grundlagen?

Ferner, wenn sich diese Theorie mit der Erfahrung stets im Einklang zeigt.

b) Sind alle Krystallgruppen, welche die allgemeine Theorie als in elastischer Hinsicht verschiedenartig zuläßt, auch factisch verschieden?

Diese Frage ist ein Theil einer in allen Gebieten der Krystallphysik auftauchenden, welche dahin geht, ob alle nach den Symmetrieverhältnissen möglichen Vorgänge auch wirklich eintreten. Es mag daran erinnert werden, daß dieselbe durch die Erfahrung bisher keineswegs allgemein bejaht wird. In dem Gebiete der Wärme- und der Electricitätsleitung sondern sich nach den Symmetrien gewisse Krystallgruppen aus der Gesammtheit der einem System zugehörigen aus und lassen sogenannte rotatorische Qualitäten zu, die bei den übrigen ausgeschlossen sind[31]). Aber es ist bisher nicht möglich gewesen bei irgend einem Krystall diese rotatorischen Wirkungen nachzuweisen[32]). Aehnlich verhält es sich mit piëzomagnetischen Effecten, die nach Symmetrie bei einer großen Zahl von Krystallgruppen möglich aber für keine einzige beobachtet sind[33]).

In beiden Fällen scheinen also theoretisch mögliche Unterschiede verschiedener Gruppen factisch nicht vorhanden zu sein, und dies Resultat giebt der unter b) formulirten Frage ihr besonderes Interesse. Ihr schließt sich eine weitere nahe verwandte an, die wir der Uebersichtlichkeit halber aber gesondert stellen.

c) Sind bei derselben Substanz alle die Constanten, welche die allgemeine Theorie als von einander unabhängig zuläßt, factisch von einander unabhängig?

In Betreff dieser Frage kommt besonders der Umstand in Betracht, daß zwar die allgemeine molekulare Theorie auf dieselben Resultate führt, wie die Nahwirkungstheorie, — daß aber eine Specialisirung derselben nach S. 137 auf die folgenden sechs Beziehungen zwischen den 21 unabhängigen Constanten der allgemeinen Theorie führt:

$$68)\qquad \begin{array}{lll} c_{23} = c_{44}, & c_{31} = c_{55}, & c_{12} = c_{66} \\ c_{14} = c_{56}, & c_{25} = c_{64}, & c_{36} = c_{45}. \end{array}$$

Der Nachweis aller oder aber einiger dieser Beziehungen in der Wirklichkeit würde gestatten, die Vorstellungen der allgemeinsten molekularen Theorie zu vereinfachen und dadurch zu corrigiren, was offenbar ein Resultat von großer principieller Bedeutung darstellen würde.

Neben diesen allgemeinen Fragen bietet sich natürlich noch die Aufgabe, Zahlenwerthe elastischer Parameter für die practische Verwendung zu bestimmen. Als Gebiete für deren Behandlung die Kenntniß derartiger Parameter unerläßlich ist, möge die Thermoelasticität [34]), die Piëzoelectricität [35]), die Electrostriction [36]) und die Optik deformirter [37]) oder electrischen Feldern ausgesetzter [38]) Körper genannt werden.

Um nummerische Bestimmungen für die Prüfung und eventuelle Correctur der Theorie zu verwerthen, muß zuvor die Theorie auf specielle der Beobachtung zugängliche Fälle angewandt, d. h. die specielle Theorie einiger Beobachtungsmethoden durchgeführt sein. Die wichtigsten der in dieser Richtung gewonnenen Resultate sollen in den folgenden Abschnitten zusammengestellt werden. Der Raum gestattet nicht, auf die Ableitung der betreffenden Formeln einzugehen, die Formeln treten also naturgemäß etwas unvermittelt auf. Ihre Mittheilung erschien aber nothwendig, um eine Vorstellung davon zu geben, welche Elasticitätsmoduln bei den beobachtbaren Vorgängen vorkommen und in welcher Weise sie auftreten. Wir werden erkennen, daß es eine nur kleine Zahl ist, die in den Gesetzen für die wichtigsten beobachtbaren elastischen Vorgängen eine Rolle spielt.

15) **Homogen deformirte Krystalle.** Der denkbar einfachste Fall der Deformation eines Krystalles resp. eines aus einem solchen gefertigten Präparates ist derjenige, wo die Dilatationscomponenten an allen Stellen des Körpers dieselben Werthe haben; man nennt ihn den Fall der homogenen Deformation. Die Theorie dieses speciellen Vorganges ist bereits durch die Formeln (61) ein für alle Mal erledigt, wenn man in ihnen die nach Annahme nothwendig gleichfalls constanten innern Druckcomponenten $X_x, \dots X_y$ gemäß den allgemeinen Grenzbedingungen (37) durch die auf die Oberfläche des Präparates wirkenden äußern Drucke bestimmt. Hat das Präparat die Form eines rechtwinkligen Prismas von beliebiger Orientirung gegen die oben besprochnen Hauptaxen X_0, Y_0, Z_0, so wählt man dessen Kanten passend zu den Richtungen eines gegen die Hauptaxen in bestimmter Weise geneigten Axensystemes X, Y, Z und erhält dann für letzteres die Beziehungen in der alten Form

69) $$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Dabei sind nach (37) $X_x, \dots X_y$ unmittelbar gleich den auf die Prismenflächen normal und tangential auszuübenden Zugkräften, $-X_x, \dots -X_y$ den betreffenden Drucken.

Diese Formeln zeigen, daß die Elasticitätsmoduln s_{hk} einer überaus einfachen und anschaulichen Deutung fähig sind; denn wenn je nur eine Druckgattung X_x, Y_y, Z_z, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$ ausgeübt wird, den übrigen aber verschwindende Werthe ertheilt werden, so reduciren sich die in (69) rechts stehenden Ausdrücke je auf ein einziges mit einem Modul s_{hk} proportionales Glied.

Demgemäß erscheinen die Parameter s_{11}, s_{22}, s_{33} als die Moduln der longitudinalen Dilatationen, s_{23}, s_{31}, s_{12} als diejenigen der Querdilatationen bei einer zur X-, Y-, Z-Axe parallelen Zug- oder Druckkraft X_x, Y_y, Z_z; s_{14}, s_{15}, s_{16} messen die Veränderungen der Kantenwinkel bei einem normalen Zug oder Druck, welcher parallel zur X-Axe wirkt, s_{24}, s_{25}, s_{26} und s_{34}, s_{35}, s_{36} analog bei Einwirkungen parallel zur Y- und zur Z-Axe.

s_{14}, s_{24}, s_{34} sind aber zugleich auch die Moduln der lineären Dilatationen, s_{44}, s_{54}, s_{64} diejenigen der Winkeländerungen bei Einwirkung der tangentialen Druckpaare $Y_z = Z_y$, und die analoge Rolle spielen die Moduln $s_{15}, \dots s_{65}$ resp. $s_{16}, \dots s_{66}$ für die Druckpaare $Z_x = X_z$ resp. $X_y = Y_x$.

Practisch realisirt sind nur die Fälle normal wirkender Drucke und auch diese fast nur so, daß entweder alle Prismenflächen

den gleichen Druck, oder aber ein Flächenpaar einen beliebigen, die beiden andern aber einen verschwindenden Druck erleiden.

Der erste Fall mag hier noch etwas weiter verfolgt werden. Aus lauter gleichmäßig von allen Seiten gedrückten prismatischen Elementen läßt sich ein beliebig gestalteter Körper aufbauen und auf diesem Zustand erhalten, indem man auf alle seine Oberflächenelemente den gleichen Druck normal ausübt. In der That wird den Haupt- und den Oberflächenbedingungen genügt durch die Verfügung

70) $$X_x = Y_y = Z_z = p,\ \ Y_z = 0,\ \ Z_x = 0,\ \ X_y = 0.$$

Da diese Formeln nach (29) für jedes Coordinatensystem gelten, so bezieht man sie passend auf das Hauptaxensystem X_0, Y_0, Z_0 und schreibt sie demgemäß

71) $$X_x^0 = Y_y^0 = Z_z^0 = p,\ \ Y_z^0 = 0,\ \ Z_x^0 = 0,\ \ X_y^0 = 0.$$

Hieraus folgt dann sehr einfach

72) $$-x_x^0 = p(s_{11}^0 + s_{12}^0 + s_{13}^0),\ \text{u. s. f.}\quad -y_z^0 = p(s_{41}^0 + s_{42}^0 + s_{43}^0),\ \text{u. s. f.}$$

An diese Formeln möge zunächst eine allgemeine Bemerkung angeknüpft werden. Es ist auf S. 144 betont worden, daß die aus den Symmetrieverhältnissen der Form abgeleiteten Grundsätze in manchen Fällen zur Festlegung eines elastischen Hauptaxensystemes nicht ausreichen. Die vorstehend behandelte Deformation durch allseitig gleichen Druck liefert einen Gesichtspunkt für eine Festsetzung in den durch das Frühere nicht erledigten Fällen. Sie legt nämlich nahe, diejenigen zu einander normalen Richtungen zu elastischen Hauptaxen X_0, Y_0, Z_0 zu wählen, die bei allseitig gleichem Druck ihre Winkel nicht ändern, — d. h. die Richtungen des Dilatationstripels bei allseitig gleichem Druck.

Diese Verfügung führt zu den drei Bedingungen

73) $$s_{41}^0 + s_{42}^0 + s_{43}^0 = 0,\ s_{51}^0 + s_{52}^0 + s_{53}^0 = 0,\ s_{61}^0 + s_{62}^0 + s_{63}^0 = 0,$$

durch die wiederum die Anzahl der Elasticitätmoduln und hierdurch auch die der Elasticitätsconstanten von 21 auf 18 reducirt wird. Es mag darauf hingewiesen werden, daß bei allen Obergruppen der Tabelle auf S. 147 mit Ausnahme der beiden ersten diese Bedingungen durch die nach den Symmetrieverhältnissen gewählten Axen identisch erfüllt sind. Die neue Verfügung ist mit der älteren also im Einklang und erweitert sie nur in einer solchen Weise, daß ihre Anwendung auf alle Gruppen möglich wird.

Die Gesetze der Deformation von Räumen, Flächen, Strecken, Winkeln durch allseitig gleichen Druck ergeben sich aus den allgemeinen Formeln (56) bis (59) durch Einsetzen der Werthe (72)

der Dilatationscomponenten[39]). Ihre Angabe mag des Raumes wegen unterbleiben. Nur der Modul s der räumlichen Compression für diesen Fall mag seines besondern Interesses wegen mitgetheilt werden; es gilt für ihn

74) $$s = s^0_{11} + s^0_{22} + s^0_{33} + 2(s^0_{23} + s^0_{31} + s^0_{12}).$$

16) **Cylindrische Stäbe mit längs der Axe constanter Deformation.** Die bei weitem wichtigsten Beobachtungsmethoden knüpfen an diejenigen Deformationen prismatischer Stäbe von gegen den Querschnitt großer Längsdimension an, welche durch Einwirkungen auf die Grundflächen der Prismen bewirkt werden.

De Saint Venant[40]) hat die Theorie der Deformationen cylindrischer Körper bekanntlich in der Weise in Angriff genommen, daß er die Umstände untersuchte, unter denen eine der Cylinderaxe parallele Elementarfaser von den Nachbarfasern nur longitudinale Drucke erfährt. Diese bei isotropen Körpern so überaus fruchtbare Methode leistet bei Krystallen weniger, da die gemachte Festsetzung über die Drucke schon bei einfachsten Fällen der Torsion nicht erfüllt ist. Demgemäß hat auch De Saint Venant nach seiner Methode nur speciellere Fälle der Deformation krystallinischer Stäbe erledigen können.

Für unser Problem scheint es vortheilhafter, der Untersuchung ein etwas anderes Ziel zu geben, nämlich sie zu richten auf die allgemeinen Eigenschaften der Deformationen, die von der Coordinate parallel der Stabaxe entweder garnicht, oder in einem Glied ersten Grades, zweiten Grades u. s. f. abhängen. Dabei soll in der von De Saint Venant benutzten Weise der Stab so lang gegen seine Querdimensionen angenommen werden, daß auf dem überwiegenden Theil seiner Länge die Deformation nur von den Gesammtcomponenten und -momenten der auf die Endquerschnitte wirkenden äußern Drucke, nicht aber von ihrer Vertheilung im übrigen abhängt.

Die größte Bedeutung hat der Fall eines längs der Axe gleichförmig deformirten Cylinders[41]). Die Untersuchung ergiebt, daß ein solcher Zustand durch Einwirkungen auf die Grundflächen hervorgerufen werden kann, die eine der Stabaxe parallele Resultirende und daneben Drehungsmomente sowohl um die Längsaxe, als um in den Endquerschnitten gelegenen Queraxen ergeben.

Wir legen das XYZ-Coordinatensystem mit seiner Z-Axe in die Linie, welche die Schwerpunkte aller Querschnitte verbindet, die X- und Y-Axe in die Hauptträgheitsaxen des Endquerschnittes $z = 0$, der in der Regel als befestigt zu denken ist. Dann mögen die auf den anderen (freien) Querschnitt $z = l$ ausgeübten

äußern Drucke die Resultirende Γ parallel z und die Momente Λ, M, N um die Coordinatenaxen ergeben. Auf dem Querschnitt $z = 0$ sind dabei zum Zwecke der Befestigung die gleichen und entgegengesetzten Einwirkungen anzubringen. Gemäß den drei Arten der ausgeübten Kräfte kommen drei Arten von elastischen Problemen in Betracht.

a) Einwirkung einer longitudinalen Zugkraft.

Der Cylinder erweist sich als homogen deformirt, die Dilatationscomponenten sind unabhängig von der Gestalt des Querschnittes ein für alle Male angebbar; sie folgen direct aus (69), wenn man darin $X_x = 0$, $Y_y = 0$, $Y_z = 0$, $Z_x = 0$, $X_y = 0$, aber $Z_z = -\Gamma/q$ setzt, wobei q den Querschnitt des Cylinders bezeichnet. Es gilt somit

75) $qx_x = s_{13}\Gamma, qy_y = s_{23}\Gamma, qz_z = s_{33}\Gamma, qy_z = s_{43}\Gamma, qz_x = s_{53}\Gamma, qx_y = s_{63}\Gamma.$

Die Moduln der Dilatationen parallel den Coordinatenaxen sind s_{13}, s_{23}, s_{33}, der Modul der Dilatation des Querschnittes ist nach (57) $(s_{13} + s_{23})$. Die Moduln der Winkeländerungen für die Coordinatenaxen oder -ebenen sind s_{43}, s_{53}, s_{63}. Nach der Tabelle auf S. 149 verschwinden alle drei Winkeländerungen, wenn die Z-Axe eine 3-, 4-, 6-zählige, die beiden ersten y_z und z_x allein, wenn sie eine 2-zählige Symmetrieaxe ist[42]).

b) Einwirkung von Drehungsmomenten um die Queraxen.

Die Dilatationscomponenten und die Druckcomponente Z_z erweisen sich für alle Querschnittsformen als lineäre Functionen von x und y; X_x, Y_y, Y_z, Z_x, X_y verschwinden.

Die Axenfaser $x = 0$, $y = 0$ des Cylinders wird nach einer Curve gebogen, deren Gleichungen lauten

76) $$\xi = \frac{Ms_{33}}{2q\varkappa_y^2}\zeta(l-\zeta), \qquad \eta = \frac{\Lambda s_{33}}{2q\varkappa_x^2}\zeta(l-\zeta);$$

dabei bezeichnen $\varkappa_x$ und $\varkappa_y$ die Trägheitsradien des Cylinderquerschnittes in Bezug auf seine mit X und Y zusammenfallenden Hauptträgheitsaxen und ist angenommen, daß beide Enden ($z = 0$ und $z = l$) der Axenfaser in der Z-Axe liegen.

Die Projectionen der Axencurve haben nach (76) die constanten Krümmungsradien

77) $$R_1 = \frac{q\varkappa_y^2}{Ms_{33}}, \qquad R_2 = \frac{q\varkappa_x^2}{\Lambda s_{33}},$$

sie sind also Kreisbogen.

Wirkt nur das eine der beiden Drehungsmomente Λ und M, so ist einer der beiden Krümmungsradien unendlich; die Axen-

curve liegt dann in der Ebene normal zu derjenigen Hauptträgheitsaxe, um welche das ausgeübte Moment wirkt.

Wegen der Constanz von R_1 und R_2 wird die Biegung durch M und Λ als gleichförmig bezeichnet. Der Modul der gleichförmigen Biegung s_{33} ist identisch mit dem Modul der Axendehnung durch longitudinalen Zug.

Mit der gleichförmigen Biegung ist bei einem Cylinder aus krystallinischer Substanz im allgemeinen eine gleichförmige Drillung verbunden. Die Drehung ω eines Querschnittes im Abstand $z = \zeta$ gegen den festgehaltenen Querschnitt $z = 0$ ist gegeben durch

78) $$2q\omega\varkappa_x^2\varkappa_y^2 = (M s_{34}\varkappa_x^2 - \Lambda s_{35}\varkappa_y^2)\,\zeta.$$

Diese merkwürdige Drillung besitzt dieselben Moduln s_{34} und s_{35}, wie nach (75) die Winkeländerungen y_z und z_x bei longitudinalem Zug. Sie verschwindet nach S. 41, wenn die Z-Axe eine beliebig-zählige Symmetrieaxe ist[43].

c) Einwirkung eines Drehungsmomentes um die Längsaxe.

Hier, bei der gewöhnlich kurz als Torsionsproblem bezeichneten Aufgabe, liegen außerordentlich viel größere Schwierigkeiten vor, wie bei den beiden vorangehenden. Für alle Querschnittsformen gemeinsam läßt sich nur ein Resultat erhalten, nämlich die Größe der die Drillung begleitenden gleichförmigen Biegung[44]. Für sie gilt in den Bezeichnungen von (77)

79) $$R_1 = \frac{2q\varkappa_y^2}{N s_{34}}, \qquad R_2 = -\frac{2q\varkappa_x^2}{N s_{35}}.$$

Die secundäre Biegung besitzt also dieselben Moduln s_{34} und s_{35}, wie die oben besprochene secundäre Drillung, und verschwindet mit ihr.

Im Uebrigen erfordert jede Form des Querschnittes eine andere Lösung. Die einfachste von ihnen gilt für einen elliptischen Querschnitt[45]; hier läßt sich allen Bedingungen durch die Einführung lineärer Functionen von x und y für alle Dilatationscomponenten, sowie für die Druckcomponenten Y_z und Z_x, und durch verschwindende Werthe X_x, Y_y, X_y, Z_z genügen. Dabei ergiebt sich für die Drehung ω des Querschnittes $z = \zeta$ der Werth

80) $$4q\omega\varkappa_x^2\varkappa_y^2 = N\zeta(s_{44}\varkappa_x^2 + s_{55}\varkappa_y^2).$$

Die Größe ω hat also zwei Moduln s_{44} und s_{55}, die sich nur für einen sehr gestreckten und für einen kreisförmigen Querschnitt auf einen reduciren.

Der für die Beobachtung hervorragend wichtige Fall eines rechteckigen Querschnittes führt auf überaus complicirte Diffe-

rentialgleichungen, die einer strengen Behandlung zu widerstehen scheinen. Allgemein läßt sich folgende Formel ableiten[46])

81) $$\omega = \frac{3N\zeta\left(s_{55} + \frac{s_{34}^2 b^2}{s_{33} a^2} + \left(\frac{s_{34}^2}{a^2} + \frac{s_{35}^2}{b^2}\right)\frac{b^3 F}{a s_{33}}\right)}{16ab^3\left(1 + \frac{b}{a}F\right)},$$

worin a und b die halben Seiten des Querschnittsrechteckes parallel der X- und der Y-Axe, F aber eine Function des Verhältnisses (a/b) bezeichnet, die nach der Art ihres Auftretens bei einigermaßen gestrecktem Querchnitt (z. B. $a/b > 3$) als constant betrachtet werden kann.

Diese Formel stellt natürlich keine vollständige Lösung des Torsionsproblemes dar, wohl aber ein Hülfsmittel, um aus Torsionsbeobachtungen nummerische Werthe von Elasticitätsmoduln, insbesondere von s_{55} abzuleiten, wobei man F (natürlich unter genauer Prüfung der Berechtigung hierzu) als unbekannte Constante behandelt und durch eine geeignete Combination von Messungen eliminiert.

Die allgemeine Formel vereinfacht sich bei Einführung einer Annäherung, die $s_{34}^2 b^2 / s_{33} s_{55} a^2$ und das Quadrat von $\left(\frac{s_{34}^2}{a^2} + \frac{s_{35}^2}{b^2}\right)\frac{b^3 F}{a s_{33} s_{55}}$ neben Eins vernachlässigt. Dann resultirt

82) $$\omega = \frac{3N\zeta s_{55}}{16ab^3\left(1 + \frac{b}{a}F_1\right)},$$

worin F_1 eine andere Constante bezeichnet. Die obige Annäherung ist selbst bei mäßigem a/b eine ziemlich bedeutende, da in Wirklichkeit s_{34} und s_{35} klein neben s_{33} und s_{55} zu sein pflegen.

In dem speciellen Fall, daß s_{34} und s_{35} verschwinden, was nach oben Gesagtem stattfindet, wenn die Z-Axe irgend eine elastische Symmetrieaxe ist, gilt streng

83) $$\omega = \frac{3N\zeta s_{55}}{16ab^3\left(1 + \frac{b}{a}F\right)}.$$

Hier läßt sich dann auch die Function F in mehr oder weniger einfacher Weise theoretisch vollständig bestimmen[47]), so daß sie nicht durch eine Combination von Beobachtungen eliminirt zu werden braucht. Soweit F Elasticitätsmoduln von nicht bekannten Zahlwerthen enthält, ist bei seiner Berechnung ein Annäherungsverfahren anzuwenden.

17) Cylindrische Stäbe mit längs der Axe lineär variirender Deformation. Auch der dem oben behandelten an Complication folgende Fall, daß die Dilatations- und Druckcomponenten lineäre Functionen von z sind, führt noch zu verhältnißmäßig einfachen Resultaten[48]). Es läßt sich zeigen, daß mit dieser Annahme Drucke gegen die freie Grundfläche vereinbar sind, welche Resultirende normal zur Stabaxe liefern, so wie auch äußere räumliche Kräfte parallel der Stabaxe von constanter Größe. Wir geben die Resultate für beide Fälle gesondert.

a) Transversale Zugkraft gegen den freien Endquerschnitt.

Zerlegt man die auf den freien Endquerschnitt wirkende Resultirende in zwei Componenten A und B parallel zu den beiden Hauptträgheitsaxen X und Y, so erhält man als Gleichungen der Axencurve unter der Annahme, daß deren erstes Element in der Z-Axe gehalten wird

84) $$\xi = \frac{As_{33}}{2q\varkappa_y^2}\zeta^2(l - \tfrac{1}{3}\zeta), \qquad \eta = \frac{Bs_{33}}{2q\varkappa_x^2}\zeta^2(l - \tfrac{1}{3}\zeta).$$

Die Axencurve ist nach einer Curve dritten Grades und somit ungleichförmig gebogen; der Modul der ungleichförmigen Biegung ist derselbe s_{33}, wie derjenige der gleichförmigen.

Die Biegung ist im Allgemeinen, obwohl ein Moment um die Längsaxe nicht wirkt, von einer Drillung begleitet. Die mittlere Drillung eines Querschnittes im Abstand $z = \zeta$ von dem befestigten ist gegeben durch

85) $$\omega = \tfrac{1}{2}\zeta^2\left(\frac{As_{34}}{\varkappa_y^2} - \frac{Bs_{35}}{\varkappa_x^2}\right).$$

Die Moduln sind dieselben, welche die Drillung bei der gleichförmigen Biegung messen[49]).

b) Longitudinale räumliche Kraft von constanter Größe.

Dieser Fall hat wegen der Kleinheit der in Wirklichkeit allein auszuübenden Kraft (der Schwere) nur eine theoretische Bedeutung. Es sei daher nur kurz erwähnt, daß ein unter der Wirkung der Schwere vertical aufgestellter oder aufgehängter Cylinder von homogener krystallinischer Substanz sich im Allgemeinen nicht nur dehnt, sondern auch krümmt. Seine Axencurve hat die Gleichungen

86) $$\xi = -\tfrac{1}{2}Z's_{35}\zeta^2, \qquad \eta = -\tfrac{1}{2}Z's_{34}\zeta^2,$$

wobei Z' die parallel der Z-Axe wirkende räumliche Kraft bezeichnet; die Projectionen der Axencurve auf die Coordinaten-

ebenen sind also Kreise von den Radien

87) $$R_1 = Z's_{35}, \qquad R_2 = Z's_{34}.$$

Dabei erleidet ein Punkt im Abstand ζ vom festen Ende $z = 0$ eine Verschiebung

88) $$w = \tfrac{1}{2} Z's_{33}\zeta.$$

Es spielen also auch hier dieselben Moduln s_{33}, s_{34}, s_{35} eine Rolle, die zuerst bei dem Problem der homogenen Deformation neben einander auftraten[50]).

Eine Erweiterung der Fragestellung auf die Fälle, daß die Druck- und Dilatationscomponenten höheren Potenzen von z als der ersten proportional sind, hat Somigliana vorgenommen[51]).

18) **Berechnung der Hauptmoduln und Hauptconstanten.** Wie aus Beobachtungen gewisse auf ein specielles Coordinatensystem X, Y, Z bezogene Moduln s_{hk} abgeleitet werden können, dürfte aus dem Vorstehenden zu ersehen sein. Indessen sind diese Moduln keine dem betreffenden Krystall individuelle Parameter, sondern je nach der Lage der Axen X, Y, Z im Krystall verschieden. Es bietet sich sonach die Aufgabe, aus beobachteten Nebenmoduln s_{hk} die für den Krystall characteristischen Hauptmoduln s_{hk}^0 zu berechnen[52]).

Ueber den Zusammenhang der beiden Arten von Parametern ist S. 142 gesprochen worden. Jedes s_{hk} ist durch die Formel (66) als eine lineäre Function sämmtlicher s_{hk}^0 dargestellt, deren Parameter von der Orientirung des Coordinatensystemes X, Y, Z gegen das System der elastischen Hauptaxen X_0, Y_0, Z_0 abhängen. Man wird daher zu den Hauptmoduln dadurch gelangen, daß man soviel geeignet gewählte (n) Nebenmoduln s_{hk} beobachtet, als der Krystall von einander unabhängige Hauptmoduln besitzt, jeden von ihnen durch die Hauptmoduln ausdrückt und die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen nach den Hauptmoduln s_{hk}^0 auflöst.

Die Nebenmoduln hat man dabei, soweit das Material dies gestattet, so zu wählen, daß jene Gleichungen möglichst einfache Gestalt annehmen, also der wahrscheinliche Fehler der berechneten Hauptmoduln möglichst gering ausfällt.

Man möchte zunächst vermuthen, daß man hiernach alle Hauptmoduln eines Krystalles dadurch finden könnte, daß man dieselbe Deformation an n verschieden orientirten Präparaten beobachtet, daß heißt, einen einzigen Nebenmodul s_{hk} auf n verschiedene Coordinatensysteme XYZ bezogen bestimmt.

Indessen zeigt eine leichte Ueberlegung, daß ein solches Verfahren nicht zum Ziele führt. Die trigonometrischen Factoren

$d_{mh} . d_{nk}$ in dem Ausdruck (66) für die Nebenmoduln sind nicht sämmtlich von einander unabhängig und demgemäß treten die Hauptmoduln in jenen Formeln nicht sämmtlich getrennt, sondern theilweise zu Aggregaten vereinigt auf. Die Beobachtung einer einzigen Art von Deformationen genügt also im Allgemeinen nicht, um sämmtliche Hauptmoduln eines Krystalles zu bestimmen.

Die bequemste Methode zur Bestimmung eines Elasticitätsmoduls ist unzweifelhaft die Biegung eines Stabes von rechteckigem Querschnitt; diese liefert nach den Formeln (76) und (84) den Modul s_{33}; drückt man denselben gemäß der Gleichung (66) durch die Hauptmoduln s^0_{hk} aus, so erhält man eine Beziehung, welche die Moduln s^0_{hk} nur in 15 Combinationen enthält; z. B. in den folgenden

$$s^0_{11},\ s^0_{22},\ s^0_{33},\ s^0_{24},\ s^0_{34},\ s^0_{35},\ s^0_{15},\ s^0_{16},\ s^0_{26},$$
$$(s^0_{44}+2s^0_{23}),\ (s^0_{55}+2s^0_{31}),\ (s^0_{66}+2s^0_{12}),\ (s^0_{14}+s^0_{56}),\ (s^0_{25}+s^0_{64}),\ (s^0_{36}+s^0_{45}).$$

Man überzeugt sich leicht, daß auch für specielle Krystallgruppen die Anzahl der Combinationen, die in s_{33} auftreten, stets kleiner ist, als die der s^0_{hk} selbst.

Hieraus folgt, daß zur experimentellen Bestimmung aller Moduln jederzeit mit der Beobachtung von Biegungen eine solche anderer Deformationen verbunden werden muß. Der practische Umstand, daß die Drillung dieselben Präparate verwerthen kann, wie die Biegung, empfiehlt ohne Weiteres jene vor allen übrigen Deformationen.

Die Drillung von Stäben mit rechteckigem Querschnitt führt aber nach (81) bis (83) auf den Modul s_{55}; damit die Combination von Biegung und Drillung das Gewünschte leistet, muß daher der Ausdruck für s_{55} in den Hauptmoduln die

$$s^0_{44},\ s^0_{55},\ s^0_{66},\ s^0_{23},\ s^0_{31},\ s^0_{12},\ s^0_{14},\ s^0_{25},\ s^0_{36},\ s^0_{56},\ s^0_{64},\ s^0_{45}$$

in anderen Combinationen enthalten, als s_{33}; in der That zeigt die durchgeführte Rechnung, daß s_{55} sich ausdrücken läßt durch

$$s^0_{11}+s^0_{23}-s^0_{12}-s^0_{31},\ s^0_{22}+s^0_{31}-s^0_{23}-s^0_{12},\ s^0_{33}+s^0_{12}-s^0_{31}-s^0_{23},$$
$$s^0_{24}-s^0_{14},\ s^0_{34}-s^0_{14},\ s^0_{35}-s^0_{25},\ s^0_{15}-s^0_{25},\ s^0_{16}-s^0_{36},\ s^0_{26}-s^0_{36},$$
$$s^0_{44},\ s^0_{55},\ s^0_{66},\ s^0_{56},\ s^0_{64},\ s^0_{45}.$$

Hieraus lassen sich aber auf mehrere Weisen sechs von den vorigen unabhängige Combinationen bilden.

Die Verbindung von Biegungs- und Drillungsbeobachtungen gestattet also für jede Krystallgruppe die sämmtlichen Hauptmoduln zu bestimmen. Außerdem bietet sie weitgehende Möglichkeiten zur

Prüfung der Theorie. In der That muß jede Beobachtung über die zur Bestimmung der Hauptmoduln nöthige Anzahl hinaus sich aus den übrigen berechnen lassen.

Sind die Hauptmoduln gefunden, so berechnen sich die Hauptconstanten auf Grund der Ueberlegung, daß die Formeln (61) durch Auflösung nach den Druckcomponenten die Gleichungen (41) liefern müssen. Die Hauptconstanten c^0_{hk} sind also ebenso Determinantenverhältnisse der Moduln, wie das umgekehrte gilt. Die nöthigen Formeln sind leicht nach bekannten Regeln aufzustellen; ihre Berechnung ist aber bei Krystallgruppen mit einigermaßen zahlreichen Elasticitätsconstanten recht umständlich, und der wahrscheinliche Fehler der Hauptconstanten fällt demgemäß unverhältnißmäßig größer aus als derjenige der Hauptmoduln, wie das schon auf S. 140 bemerkt worden ist.

Thesen.

Die Combination von Biegungs- und Drillungsbeobachtungen an prismatischen Stäben giebt die geeigneteste Methode zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen.

Dabei wird man soviel elastische Parameter als möglich mit Hülfe von Biegungen bestimmen und nur zur Ergänzung Drillungen heranziehen.

Die Elasticitätsmoduln sind bei practischen Anwendungen zur Characterisirung eines Krystalles geeigneter als die Elasticitätsconstanten.

Als elastische Hauptaxen eines Krystalles empfehlen sich besonders diejenigen drei zu einander normalen Richtungen, die bei allseitig gleichem Druck ihre Winkel nicht ändern.

VI. Beobachtungen elastischer Parameter von Krystallen und ihre Verwerthung.

19) **Bestimmungen unvollständiger Constantensysteme.** Es mögen nun zunächst diejenigen Beobachtungen aufgezählt werden, die nur auf specielle Fragen hin gerichtet waren und zu keiner Bestimmung eines vollständigen Systemes von Hauptmoduln führten.

Die ersten messenden und dadurch Epoche machenden Versuche über Krystallelasticität rühren von Baumgarten[53]) her; ihr Ziel war — in unserer Ausdrucksweise — die Bestimmung des Moduls s_{33} durch Biegungsbeobachtungen für verschieden orientirte Stäbe von Kalkspath und die Vergleichung derselben mit dem für diesen Körper aus der allgemeinen Formel (66) folgenden Ausdruck. Die Beobachtungen erwiesen sich mit dem theo-

Gesetz in Einklang und liefern somit einen Beitrag zur Beantwortung der auf S. 36 gestellten allgemeinen Frage a).

Die Bestimmung einzelner Zahlwerthe des Moduls s_{33} für einige reguläre Krystalle war auch das Ziel der Beobachtungen von Koch[54]) und von Beckenkamp[55]); ersterer untersuchte Steinsalz, Sylvin, chlorsaures Natron, letzterer Kaliumalaun und Chromalaun; zu einer Vergleichung mit der Theorie reichen beide Beobachtungsreihen nicht aus. Die Beobachtungen von Coromilas[56]) an zwei monoclinen Krystallen (Gyps und Glimmer) betreffen gleichfalls den Modul s_{33}, erstrecken sich aber nur auf Richtungen, die in einer Ebene liegen, und sind demgemäß gleichfalls unvollständig.

Von Niedmann[57]) sind die Werthe s_{33} für die Richtungen der krystallographischen Hauptaxen in Baryt bestimmt. Vereinzelte Zahlen für verschiedene Krystalle hat Mallock[58]) abgeleitet.

Alle diese Beobachter verwendeten prismatische Stäbe, wobei allerdings nicht immer Sorge getragen war, die fundamentale Annahme, welche die für die Berechnung der Beobachtungen benutzte Formel voraussetzt, nämlich die Kleinheit der Querdimensionen neben den Längsdimensionen, zu erfüllen.

Zu exacten Bestimmungen nicht geeignet ist die Biegung von Kreisscheiben, die auf zwei parallele Schneiden gelagert werden[59]), und die Abplattung einer gegen eine Platte von krystallinischer Substanz gepreßten isotropen Kugel, da die Vorgänge sich theoretisch nicht behandeln lassen[60]). Immerhin kann die Methode der Kreisscheibe dazu benutzt werden, um mit Aufwand von wenig Material zu demonstriren, daß in speciellen Fällen um die zu der Scheibe normal stehende Axe die Elasticität die Symmetrie eines Rotationskörpers besitzt. In diesem Sinne ist die von Groth angegebene Methode von Vater[61]) zur Bestätigung einer Folgerung der Theorie an Platten aus Kalkspath und Apatit benutzt worden, die normal zu der drei- resp. sechszähligen Symmetrieaxe dieser Krystalle geschnitten waren.

Die Bestimmung der räumlichen Compressibilität eines Krystalles mit dem Piëzometer liefert nach (74) nur ein einziges Aggregat der Hauptmoduln und kommt daher für die Ableitung eines vollständigen Modulsystemes wenig in Betracht, um so weniger, als genaue Messungen dieser Art die größten Schwierigkeiten bieten. Doch kann eine solche Beobachtung durch ihre Berechnung mit Hülfe anderweit bestimmter Moduln eine eigenartige Prüfung der Theorie liefern[62]).

20) **Bestimmungen vollständiger Constantensysteme.** Vollständige Modul- resp. Constantensysteme hat (abgesehen von einer durch ihn nur veranlaßten Beobachtungsreihe [63]), die wegen der Minderwerthigkeit des Materiales keine entscheidende Bedeutung besitzt) bisher allein der Referent bestimmt [64]). Die von ihm angestellten Messungen beziehen sich auf folgende Krystalle.

Reguläres System.

Gruppe 28. Steinsalz, Flußspath.
„ 29. Sylvin.
„ 31. Pyrit.
„ 32. Chlorsaures Natron.

Hexagonales System.

Gruppe 21. Beryll.

Rhomboëdrisches System.

Gruppe 9. Kalkspath.
„ 10. Bergkrystall.
„ 11. Turmalin.
„ 12. (Dolomit.)

Rhombisches System.

Gruppe 6. Topas, Baryt.

Die Beobachtungen über Dolomit gehören im Grunde nicht in die vorstehende Zusammenstellung, da das verfügbare Material für die Bestimmung aller Parameter der Substanz nicht ausreichte; indessen sind sie in bestimmter Rücksicht auf eine der oben formulirten allgemeinen Fragen unternommen und geben durch die Vergleichung ihrer Resultate mit den für die andern Krystalle des rhomboëdrischen Systemes erhaltenen zu deren Beantwortung einen wichtigen Beitrag, — sie stehen also doch mit jenen in einem inneren Zusammenhang.

Was nun jene allgemeinen Fragen selbst angeht, so hat sich eine Differenz zwischen der allgemeinsten (Fern- oder Nahwirkungs-) Theorie und der Erfahrung (Frage a) bei den auf die Prüfung gewisser überraschender Folgerungen derselben berechneten Beobachtungen an Steinsalz, Beryll, Kalkspath nicht ergeben. Man wird also um so mehr die 21-constantigen Elasticitätsformeln als die Beobachtungen umfassend betrachten dürfen, als schwer einzusehen ist, nach welcher Richtung hin sie erweitert werden können, so lange man die durch die Beobachtung in weitem Umfange bestätigte Proportionalität zwischen Druck- und Dilatationscomponenten festhält.

Die nach den Symmetrieverhältnissen möglichen Verschiedenheiten zwischen den Krystallgruppen haben sich bisher als in der Wirklichkeit auch stets vorhanden erwiesen (Frage b). Insbesondere haben sich die regulären Krystalle, obwohl optisch isotrop, elastisch stark aeolotrop, und die Krystalle des rhomboëdrischen Systemes, obwohl optisch den hexagonalen gleichwerthig, elastisch von ihnen durchaus verschieden erwiesen. Ein besonderes Interesse bietet das elastische Verhalten von Dolomit, verglichen mit dem des ihm krystallographisch so ähnlichen Kalkspath dar. Die Verschiedenheit der Symmetrie, die sich in der Form gelegentlich gar nicht ausprägt und nur durch Aetzfiguren nachgewiesen werden kann, drückt sich in den Elasticitätsverhältnissen außerordentlich stark aus.

Bestimmte zahlenmäßige Relationen zwischen den für denselben Krystall geltenden Elasticitätsconstanten hat die Beobachtung nicht hervortreten lassen (Frage c). Insbesondere haben sich die Poisson-Cauchy'schen Relationen (68) im allgemeinen durchaus nicht bewährt; bei Steinsalz ist die für das reguläre System aus ihnen folgende einzige Beziehung $c_{12} = c_{44}$ allerdings nahe erfüllt, bei andern Krystallen desselben Systems dagegen gar nicht; bei Pyrit und chlorsaurem Natron stimmen nicht einmal die Vorzeichen von c_{12} und c_{44} überein. Auch in den andern Systemen finden sich neben vereinzelten angenäherten Uebereinstimmungen, wie bei Beryll, sehr große Abweichungen.

Die Hypothese von Molekularkräften, die in der Verbindungslinie liegen und nur von der Entfernung abhängen, ist durch diese Resultate als definitiv widerlegt zu betrachten. Daß sie aus andern Gründen unwahrscheinlich ist, wurde bereits S. 127 erörtert.

Was die für die einzelnen Krystalle gefundenen Zahlwerthe der Elasticitätsmoduln und -constanten betrifft, so ist ihre Aufzählung an dieser Stelle wohl nicht angebracht. Doch sei Folgendes bemerkt.

Die absoluten Zahlwerthe der Elasticitätsmoduln sind bei den verschiedenen untersuchten Krystallen außerordentlich verschieden. Im allgemeinen besitzen die Körper von größerer Härte die kleineren Moduln, also die größeren elastischen Widerstände. Bei Benutzung von Gramm-Gewichten als Kraft- und Millimetern als Längeneinheiten ergiebt sich z. B. bei chlorsaurem Natron

$$s^0_{11} = 24{,}1 . 10^{-8}, \quad s^0_{12} = 12{,}3 . 10^{-8}, \quad s^0_{44} = 82{,}1 . 10^{-8},$$

bei Topas

$$s^0_{11} = 4{,}34.10^{-8},\quad s^0_{23} = -0{,}65.10^{-8},\quad s^0_{44} = 9{,}06.10^{-8},$$
$$s^0_{22} = 3{,}46.10^{-8},\quad s^0_{31} = -0{,}84.10^{-8},\quad s^0_{55} = 7{,}39.10^{-8},$$
$$s^0_{33} = 3{,}77.10^{-8},\quad s^0_{12} = -1{,}35.10^{-8},\quad s^0_{66} = 7{,}49.10^{-8}.$$

Doch ist diese Regel keineswegs eine allgemeine. Für Pyrit gilt z. B.

$$s^0_{11} = 2{,}83.10^{-8},\quad s^0_{12} = 0{,}43.10^{-8},\quad s^0_{44} = 9{,}30.10^{-8}. \text{ —}$$

Nach dem S. 154 Gesagten messen $s^0_{hk} = s^0_{kh}$ für h und k gleich 1, 2, 3, aber $h \lessgtr k$, die Querdilatationen in der Richtung der h^{ten} Coordinatenaxe bei Zugkräften, die parallel zu der k^{ten} Coordinatenaxe wirken. Diese Moduln ergiebt die Beobachtung, wie das die Erfahrung an isotropen Körpern zunächst erwarten läßt, in den meisten Fällen negativ; die Längsdehnung ist von einer Quercontraction begleitet. Topas giebt hierfür ein Beispiel. Indessen ist diese Eigenschaft keine allgemeine; die vorstehenden Zahlen für Pyrit und chlorsaures Natron zeigen, daß Cylinder, aus diesen Krystallen parallel einer Hauptaxe hergestellt und longitudinal gedehnt, sich transversal dilatiren, — ein Resultat, das einigermaßen überraschend erscheint.

Allgemeine Untersuchungen über die Frage der Eindeutigkeit der elastischen Probleme (d. h. darüber, ob unter gegebenen äußeren Einwirkungen bei unendlich kleinen Verrückungen u, v, w mehrere verschiedene Gleichgewichtszustände möglich sind) haben zu dem Resultat geführt, daß diese Eindeutigkeit nur in dem Falle allgemein bewiesen werden kann, daß das elastische Potential f wesentlich positiv ist.

Die allgemeinen Bedingungen hierfür hat Jacobi[65]) angegeben; ihre Erfüllung hängt von den Zahlwerthen der elastischen Parameter ab; es ist somit eine interessante Frage, ob die gefundenen vollständigen Parametersysteme die Jacobi'schen Bedingungen erfüllen. Wesendonck[66]) hat diese Untersuchung durchgeführt und gezeigt, daß wirklich bei den beobachteten Krystallen das elastische Potential f eine wesentlich positive Function darstellt.

21) **Anwendung der gefundenen Resultate auf isotrope Körper.** Die vorstehend entwickelten Resultate gestatten interessante Anwendungen auf isotrope Körper.

Es ist im II. Theil hervorgehoben worden, daß die einconstantigen Elasticitätsformeln, welche die älteste molekulare Theorie liefert, durch die Erfahrung nicht bestätigt werden. Man möchte nun vermuthen, daß die Einführung der allgemeinen Gesetze der Molekularwirkung, mit denen die spätere Fernwirkungs-

theorie operirt, und durch welche die Formeln der Krystallelasticität in Uebereinstimmung mit der Nahwirkungstheorie und mit der Erfahrung gelangen, bei den isotropen Körpern analog zu den zweiconstantigen Formeln führen würde, welche die Nahwirkungstheorie liefert, und welche mit den Beobachtungen im Einklang sind.

Das ist aber so ohne Weiteres keineswegs der Fall. Denn wenn man einen isotropen Körper als eine Anhäufung jener als Moleküle bezeichneten Elementarmassen mit allen möglichen gegenseitigen Orientirungen betrachtet, so ergiebt die S. 129 angeführte Definition der Druckcomponenten, daß in ihnen die Abhängigkeit der Molekularwirkungen von der Richtung keinen Einfluß auf die Werthe der betreffenden Summen haben kann; letztere fallen ebenso aus, als wenn statt der mit der Richtung veränderlichen Kraft eine constante von einer gewissen mittleren Größe wirksam wäre, und zwischen den beiden Elasticitätsconstanten resultirt dieselbe numerische Beziehung, wie sie die ältere Molekulartheorie lieferte.

Nun legt aber die directe Anschauung eine andere Auffassung der isotropen Körper nahe, welche zu neuen und befriedigenderen Resultaten führt[67]).

Alle Metalle, fast alle dichten Gesteine stellen sich unmittelbar als Anhäufungen von Krystallindividuen je nach Umständen verschiedener Größe dar, die in allen möglichen Orientirungen einander angelagert sind; bei andern Körpern, z. B. bei gewissen Glassorten, wird der gleiche Aufbau durch Aetzung einer angeschliffenen Fläche sichtbar. Man darf daher annehmen, daß eine solche, vom Referenten als quasi-isotrop bezeichnete Structur in der Natur die Regel bildet.

Sind die Krystallindividuen groß gegen die Wirkungssphäre der Molekularkräfte, aber klein gegen die Dimensionen des betrachteten Körpers, und erfüllen sie den Raum vollkommen, ohne Zwischenschichten loser, pulveriger Consistenz, so kann man mittlere Werthe der Druckcomponenten, und somit der Elasticitätsconstanten des quasi-isotropen Körpers aus denen des homogenen Krystalles berechnen.

Nach der Grundannahme schneidet jede durch den quasi-isotropen Körper gelegte Ebene Krystallindividuen in allen möglichen Orientirungen, und die in jedem einzelnen liegenden Bereiche der Ebene sind groß gegen die Molekularwirkungssphäre. Hieraus folgt, daß die Druckcomponenten gegen eine solche Ebene dem arithmetischen Mittel derjenigen

Werthe gleichgesetzt werden dürfen, welche die analogen Componenten in dem homogenen Krystall bei allen möglichen Orientirungen des Flächenelementes annehmen.

Geht man also von den Formeln

89)
$$-X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + \cdots + c_{16}x_y,$$
$$-Y_z = c_{41}x_x + c_{42}y_y + \cdots + c_{46}x_y$$

aus, bildet sie für alle möglichen Orientirungen des Systemes X, Y, Z gegen das Hauptsystem X_0, Y_0, Z_0 und berechnet aus ihnen die arithmetischen Mittel, so erhält man die Werthe der normalen und der tangentialen Druckcomponenten für den quasi-isotropen Körper.

Die resultirenden Ausdrücke nehmen die Gestalt an

90)
$$-X_x = cx_x + c_1 y_y + c_1 z_z,$$
$$-Y_z = \tfrac{1}{2} c_2 y_z;$$

hierin bezeichnet

91)
$$c = \tfrac{1}{5}(3A + 2B + 4\Gamma), \qquad c_1 = \tfrac{1}{5}(A + 4B - 2\Gamma),$$
$$c_2 = \tfrac{1}{5}(2A - 2B + 6\Gamma),$$

wobei abgekürzt gesetzt ist

92)
$$c^0_{11} + c^0_{22} + c^0_{33} = 3A, \qquad c^0_{23} + c^0_{31} + c^0_{12} = 3B,$$
$$c^0_{44} + c^0_{55} + c^0_{66} = 3\Gamma.$$

A, B, Γ sind hiernach gewisse einfache Mittelwerthe aus $3 \times 3 = 9$ (verwandten) Hauptconstanten des Krystalles; die 12 andern Hauptconstanten kommen in den Formeln für die Constanten des quasi-isotropen Körpers überhaupt nicht vor.

Zwischen den Constanten c, c_1, c_2 des Ansatzes (90) folgt aus (91) jederzeit die Beziehung

93)
$$c_2 = (c - c_1),$$

welche sowohl die alte Molekularhypothese, wie auch die Nahwirkungstheorie liefert; eine weitere Relation zwischen den Constanten findet aber im allgemeinen nicht statt. Die Formeln (90) bis (93) sind hiernach mit den Resultaten der Nahwirkungstheorie identisch.

Nur in dem Falle, daß die Moleküle der Krystallindividuen keine Polaritäten besitzen, und demgemäß nach (69) die Poisson-Cauchy'schen Formeln

$$c^0_{44} = c^0_{23}, \qquad c^0_{55} = c^0_{31}, \qquad c^0_{66} = c^0_{12}$$

gelten, wird $B = \Gamma$ und demgemäß

$$c_1 = \tfrac{1}{2}c_2, \qquad c = 3c_1.$$

Das ist die Poisson'sche Relation für isotrope Körper, welche den Uebergang zu den einconstantigen Elasticitätsformeln vermittelt und zu deren Prüfung so viele Untersuchungen mit dem verschiedensten Erfolg durchgeführt worden sind.

Von dem oben skizzirten Standpunkt aus ist die hierbei gefundene Verschiedenheit des Verhältnisses c/c_1 bei verschiedenen Körpern vollkommen verständlich. Für diejenigen Krystalle, deren Elasticitätsconstanten bestimmt sind, ist das Verhältniß c/c_1 nach den Formeln (91) und (92) leicht zu berechnen, und man erhält für dasselbe eine überaus bunte Mannigfaltigkeit von Zahlen, von dem größten Werth 13,7 für Bergkrystall bis herab zu negativen Werthen für Pyrit und chlorsaures Natron.

Was die Prüfung dieser Theorie durch die Erfahrung betrifft, so kommt hier der Uebelstand in Betracht, daß nur wenige quasiisotrope Körper von der vorausgesetzten Beschaffenheit neben den zugehörigen für Messungen brauchbaren Krystallen existiren. Die dichten (quasi-isotropen) Vorkommen zeigen in der Regel die Krystallindividuen durch pulverige Massen von äußerst kleinem elastischen Widerstand lose verkittet und sie ergeben daher nach den Beobachtungen, die der Referent zusammen mit Herrn Drude angestellt hat [6b]), auch natürlich erheblich kleinere elastische Widerstände, als sie nach den Formeln (91) und (92) haben müßten. Man kann indessen plausibel machen, daß diese Störungen auf die verschiedenen in den Formeln für die Drucke auftretenden Summen proportionale Wirkungen üben, und daß demgemäß, trotz der Verkleinerung der absoluten Werthe der (Widerstands-)Constanten c und c_1, doch ihr Verhältniß c/c_1 nahezu die theoretische Größe haben müsse.

Vergleicht man nun die für die dichten Vorkommen beobachteten Verhältnisse c/c_1 mit den aus den Elasticitätsconstanten des homogenen Krystalles berechneten, so findet man eine angenäherte Uebereinstimmung. Besonders frappirend ist das Verhalten von zwei Varietäten amorpher Kieselsäure verglichen mit dem des Bergkrystalles. Wie oben gesagt, liefert der letztere statt der Poisson'schen Zahl 3 für c/c_1 den exceptionell großen Werth 13,7; für Feuerstein fand sich nach der Beobachtung 11,7, für Opal 15,6.

Um die Bedeutung dieser Resultate richtig zu beurtheilen muß man in Betracht ziehen, daß es einerseits keineswegs sicher ist, daß Feuerstein und Opal die Kieselsäure wirklich in der Modi-

fication des Bergkrystalles enthalten, und daß andererseits die direct beobachtbaren Werthe des Dehnungs- und des Drillungswiderstandes E und T sich in dem Ausdruck für das Constantenverhältniß c/c_1 so combiniren, daß das Resultat eine relativ geringe Sicherheit besitzt.

Man stellt daher die Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung am besten an dem Verhältniß E/T selbst an; diese Größe wird durch die Poisson-Cauchy'schen Relationen für alle Körper zu 2,5 gegeben, die oben entwickelte Theorie verlangt für Bergkrystall $2{,}13_6$, die Beobachtungen liefern für Feuerstein $2{,}15_8$, für Opal $2{,}12_0$. Die Uebereinstimmung ist so bedeutend, daß die dargestellte Theorie dadurch eine werthvolle Stütze erhält.

Thesen.

Die bisherigen Beobachtungen sind nach jeder Richtung hin mit den 21-constantigen Elasticitätsgleichungen in Uebereinstimmung.

Krystallgruppen, welche nach der allgemeinen Theorie elastisch verschiedenwerthig sein können, haben sich bisher auch stets verschiedenwerthig ergeben.

Die Poisson-Cauchy'schen Relationen zwischen den Elasticitätsconstanten werden durch die Beobachtungen in einzelnen Fällen angenähert bestätigt, sind aber in den meisten Fällen auch nicht einmal näherungsweise erfüllt.

Das elastische Verhalten isotroper Körper läßt sich durch die molekulare Hypothese nur dann erklären, wenn man diese Körper aus Krystallfragmenten aufgebaut annimmt.

Anhang.

Theorie der Thermoelasticität[69]).

In der vorstehenden Darstellung sind (bis auf die nur vorübergehend herangezogenen räumlichen Drehungsmomente, die kaum mechanisch realisirbar sind,) ausschließlich mechanische Einwirkungen auf die Krystalle vorausgesetzt. Es ist aber bekannt, daß die elastischen Kräfte auch noch durch andere Vorgänge ausgelöst werden können, so insbesondere durch die Einwirkung von Wärme, von electrischen und von magnetischen Feldern. Jede dieser Wirkungen giebt Veranlassung zu theoretischen Ueberlegungen, die wichtige Erweiterungen der vorstehenden darstellen. Der Raum gestattet nur kurze Andeutungen über sie zu geben.

Man betrachtet die angeführten Vorgänge als im thermodynamischen Sinne umkehrbare und stellt daher ihre Gesetze am besten mit Hülfe der als thermodynamisches Potential bezeichneten Function dar, deren Existenz eben der Ausdruck jener

Umkehrbarkeit ist, und deren Differentialquotienten bekanntlich alle für die betrachteten Erscheinungen characteristischen Größen in einfachster Weise liefern.

Versteht man unter Ω das thermodynamische Potential der Volumeneinheit eines Krystalles, so wird dasselbe bei den oben genannten Vorgängen außer von den Dilatationscomponenten x_x, ... x_y auch von der Temperaturänderung τ, sowie von den electrischen und den magnetischen Feldcomponenten X, Y, Z und A, B, C abhängen müssen.

Dann liefern nach den Grundsätzen der Thermodynamik die negativen ersten partiellen Differentialquotienten von Ω nach den Dilatationscomponenten x_x, ... x_y die allgemeinen Druckcomponenten Ξ_x, ... Ξ_y, diejenigen nach den electrischen und nach den magnetischen Feldcomponenten die elektrischen und magnetischen Momente ξ, η, ζ und α, β, γ der Volumeneinheit; der negative erste Differentialquotient nach der Temperatur τ ergiebt den durch die andern Argumente bedingten Zuwachs der Energie der Volumeneinheit. Handelt es sich neben den stets äußerst kleinen Dilatationscomponenten auch nur um kleine Temperatur-Aenderungen τ und mäßige Feldcomponenten, so kann man Ω nach Potenzen jener Variabeln entwickeln und das niedrigste in Betracht kommende Glied (dasjenige zweiten Grades) allein beibehalten. Die Specialisirung dieses Ausdruckes auf die verschiedenen Krystallsysteme läßt sich dann nach den Grundsätzen von S. 143 vornehmen, am besten mit Hülfe einer geeigneten Zerlegung von Ω in einfachere Glieder, wie sie S. 135 ausgeführt ist.

Für die Vorgänge der Thermoelasticität sind nur die von x_x, ... x_y und τ abhängigen Glieder maßgebend. Ω ist hier also zusammengesetzt aus einer homogenen Function zweiten Grades der x_x, ... x_y, d. h. dem gewöhnlichen elastischen Potential f, aus einem mit τ^2 proportionalen Glied und einem Term, der bilineär in τ und x_x, ... x_y ist. Wir können daher setzen:

94) $$\Omega = f - \tau(q_1 x_x + q_2 y_y + \cdots + q_6 x_y) - \tfrac{1}{2} r \tau^2,$$

worin die q_h und r Constanten bezeichnen.

Für die Druckcomponenten folgen dann die Formeln

95) $$\Xi_x = X_x + q_1 \tau, \; \ldots \; \Xi_y = X_y + q_6 \tau,$$

wobei X_x, ... X_y die in (41) angegebenen Werthe besitzen; die Glieder $q_h \tau$ sind also die thermischen Druckcomponenten, die zu den rein oder isotherm elastischen Componenten X_x, ... Y_y bei Temperaturänderungen hinzutreten.

Fehlen z. B. äußere Einwirkungen, so sind Ξ_x, ... Ξ_y gleich

Null, und bei Einsetzen der Werthe (41) für $X_x, \ldots X_y$ folgen aus (95) Ausdrücke für die der Temperaturänderung τ entsprechenden Dilatationscomponenten von der Form

96) $$x_x = a_1 \tau, \quad y_y = a_2 \tau, \ldots x_y = a_6 \tau;$$

die hierdurch definirten thermischen Deformationscoefficienten a_h sind gegeben durch die Formeln

97) $$a_h = q_1 s_{h1} + q_2 s_{h2} + \cdots q_6 s_{h6},$$

welche, nach den q_h aufgelöst, auch liefern

98) $$q_h = a_1 c_{h1} + a_2 c_{h2} + \cdots a_6 c_{h6}.$$

Die letzteren Formeln haben ein besonderes Interesse, weil sie die Berechnung der Constanten q_h der thermischen Drucke aus den der Beobachtung zugänglichen Elasticitäts- und thermischen Deformationsconstanten ermöglichen. Deren Bestimmung gewährt aber einen Einblick einerseits in die absolute Größe der bei Temperaturänderungen erregten Drucke, andererseits gestattet sie, zu beurtheilen, ob und wie stark diese Drucke mit der Richtung im Krystall variiren.

Die Beobachtung hat in Bezug auf die letzteren Fragen erwiesen, daß die thermischen Drucke, ebenso wie die elastischen, Functionen der Orientirung des Flächenelementes sind, gegen welches sie wirken, daß sie positiv sind, wenn auch der Krystall sich bei der Erwärmung in einer Richtung zusammenzieht, und daß die Wirkung einer Temperaturerhöhung im allgemeinen durch einen allseitig gleichen Druck nicht aufgehoben werden kann. —

Für den Zuwachs der Entropie H der Volumeneinheit, welcher den Deformationen $x_x, \ldots x_y$ und der Temperaturänderung τ entspricht, folgt nach dem oben Gesagten aus (94) der Ausdruck

99) $$H = q_1 x_x + q_2 y_y + \cdots + q_6 x_y + r\tau.$$

Bezeichnet T_0 die absolute Anfangstemperatur, von der aus der (kleine) Zuwachs τ gerechnet wird, so ist nach den Grundsätzen der Thermodynamik $T_0 H$ die der Volumeneinheit des Krystalles zugeführte Wärme Q in mechanischem Maaß, und Q/τ die Wärmecapacität Γ der Volumeneinheit. Demgemäß ist rT_0 dieser Capacität bei fehlender Deformation gleich.

Ist der Vorgang adiabatisch, d. h., findet er ohne Wärmezufuhr statt, so ist $H = 0$, und diese Gleichung ergiebt bei Einsetzen des Ausdruckes (99) für H den Werth τ der als Folge nur der Deformation eintretenden Temperaturänderung. Setzt man diesen Werth in die Ausdrücke (95) für die allgemeinen Druckcomponenten $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ ein, so erhält man in $x_x, \ldots x_y$ homogene Ausdrücke, die für alle adiabatischen elastischen Vor-

gänge dieselbe Rolle spielen, wie die Grundformeln (41) für isothermische. An Stelle der isothermischen Elasticitätsconstanten c_{hk} stehen in ihnen die adiabatischen c'_{hk}, die mit den ersteren verbunden sind durch die Formeln

$$c'_{hk} = c_{hk} + \frac{q_h q_k}{r}. \tag{100}$$

Aehnlich ordnen sich den oben allein benutzten isothermischen auch adiabatische Elasticitäts m o d u l n zu. Der Referent hat die Werthe der adiabatischen Parameter für diejenigen Krystalle, für welche die isothermischen Parameter bekannt sind, berechnet. Die Unterschiede der beiden Größenarten sind bei einigen Körpern ziemlich beträchtlich. —

Isothermische und adiabatische Vorgänge sind extreme Fälle, denen die wirklichen unter Umständen so nahe kommen, daß sie damit identificirt werden können.

Als isothermisch werden wir einen elastischen Vorgang dann ansehen, wenn er in einer Umgebung von constanter Temperatur sich so langsam abspielt, daß die durch die Deformation selbst nach dem Vorstehenden erregte Temperaturänderung des Körpers Zeit hat, sich durch Wärmeleitung nahezu vollständig auszugleichen. Als adiabatisch werden wir ihn dann betrachten, wenn die Aenderungen so schnell verlaufen, daß die Wärmeleitung nur verschwindend geringe Wirkung zu üben vermag. Ersteres findet bei den sogenannten statischen Beobachtungsmethoden statt, letzteres bei allen schnellen Schwingungen, also im Gebiete der Akustik. Im ersten Falle darf man demgemäß mit den isothermischen, im letzten mit den adiabatischen Elasticitätsconstanten und -moduln operiren. —

Wie die vorstehenden Ueberlegungen zugleich die Gesetze der thermischen Deformation und die der Deformationswärme lieferten, so ergeben analoge Betrachtungen mit einem durch Berücksichtigung der electrischen Feldcomponenten erweiterten Potential Ω die Gesetze die Piëzo- und Pyroelectricität und die der reciproken Phänomene der Electrostriction und der electrischen Erwärmung der Krystalle. Indessen muß der bloße Hinweis auf diese Beziehungen an dieser Stelle genügen.

Literatur.

1) C. R. T. 71, p. 160, 1870; T. 75, p. 1391, 1872; T. 81, p. 1369, 1875. 2) z. B. W. Thomson, Trans. Roy. Soc. April 24, 1856, May 18, 1865; Artikel Elasticity aus der IX. Ausgabe der Encyclopaedia Britannica 1878. 3) W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898, p. 20 u. f. 4) Navier, Mém. de l'Acad. T. 7, p. 375, 1827. 5) A. Cauchy, Exerc. de Math. T. 3, p. 188 u. 214, 1828. 6) S. D. Poisson, Mém. de l'Acad. T. 8, p. 357, 1829; Journ. de l'école polyt. Cah. 20, T. 13, p. 1, 1831. 7) S. D. Poisson, Journ. de l'école polyt. Cah. 20, p. 82, 1831; A. Cauchy, Exerc. de math. T. 4, p. 293, 1829; G. Green, Cambr. Phil. Soc. T. 7, p. 121, 1839. 8) S. D. Poisson, Mém. de l'Acad. T. 18, p. 3, 1842. 9) W. Voigt, IV*), p. 3. 10) A. Cauchy, Exerc. de Math. T. 3, p. 213, 1828; S. D. Poisson, Mém. de l'Acad. T. 8, p. 373, 1829; T. 18, p. 47, 1842. 11) Fr. Neumann, Vorlesungen über Elasticitätstheorie, seit 1830, publicirt 1885; G. Kirchhoff, Crelle's Journ. Bd. 56, p. 285, 1858. 12) S. D. Poisson, Mem. de l'Acad. T. 8, p. 374, 1829; T. 18, p. 51, 1842. 13) W. Voigt, IV, p. 7. 14) W. Voigt, l. c. p. 21. 15) G. Kirchhoff, l. c. Wahrscheinlich liegt auch hier eine Anregung von Fr. Neumann vor; s. Pogg. Ann. Bd. 31, p. 180, 1834. 16) A. Cauchy, Exerc. de math. T. 3, p. 226, 1828 (nicht explicite ausgesprochen); S. D. Poisson, Mém. de l'Acad. T. 18, p. 115, 1842 (nur für Krystalle mit drei zueinander normalen Symmetrieebenen); Vergl. Clausius, Pogg. Ann. Bd. 76, p. 46, 1849; De Saint Venant, Savants étrangers, T. 14, p. 260, 1853. 17) Lord Kelvin, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, T. 16, p. 693, 1890; Proc. Roy. Soc. T. 54, p. 59, 1893; B. Elie, Journ. de Phys. (2) T. 5, p. 204. 1886. 18) C. Christiansen, Elemente der theor. Phys. Leipzig 1894, p. 98; vergl. auch Todhunter and Pearson, A History of Elasticity, T. I, Cambridge 1886, p. 881. 19) W. Voigt, Abh. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Bd. 36, p. 40, 1890; Wied. Ann. Bd. 41, p. 715, 1890; Die fundamentalen phys. Eigenschaften etc. p. 137 u. f. 20) W. Voigt, I, p. 404; IV, p. 49*). 21) Fr. Neumann, Vorlesungen; Andeutungen darüber finden sich Pogg. Ann. Bd. 31, p. 177 u. f. 1834. 22) G. Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1870, p. 390. 23) W. Voigt, I, p. 275. 24) H. Aron, Wied. Ann. 20, p. 272, 1883. 25) B. Minnigerode, Nachr. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, 1884, p. 195, 374, 484. 26) W. Voigt, Komp. d. theor. Physik Bd. I, p. 133, Leipzig 1895; Die fundamentalen phys. Eigenschaften etc. p. 191. 27) Schönflies, Krystallsysteme u. Krystallstructur 1891, p. 146—147. 28) W. Voigt, Kompendium p. 134; Die fundamentalen phys. Eigenschaften etc. p. 193. 29) W. Voigt, Kompendium p. 139. 30) F. Savart, Ann. de Chimie, T. 40, p. 5, 1821; Mém. de l'Acad., T. 9, p. 405, 1830.

*) W. Voigt, I, II, III, IV bezeichnet die Abhandlungen Wied. Ann. Bd. 16, p. 273 u. 398, 1882; Wied. Ann. Bd. 16, p. 416, 1882; Wied. Ann. Bd. 29, p. 604, 1886; Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen Bd. 34, 1887.

31) G. Stokes, Cambr. and Dubl. Math. Journ. T. 6, p. 233, 1851. 32) Ch. Soret, Arch. Sciences phys. et nat. T. 29, p. 355, 1893; T. 32, p. 631, 1894. 33) Die hierauf bezüglichen Formeln werden demnächst in Drude's Annalen mitgetheilt werden. 34) Allgemeine Theorie von W. Thomson, Quart. Journ. of Math. T. 1, p. 57, 1857; Anwendung auf Krystalle unter Benutzung der elastischen Parameter von W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 36, p. 743, 1889. 35) W. Voigt, Allgemeine Theorie etc. Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Bd. 36, 1890; E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 45, p. 523, 1892. 36) Fr. Pockels, Neues Jahrb. f. Min. Beil. Bd. 7, p. 253, 1890; W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 55, p. 701, 1895. 37) Fr. Pockels, Wied. Ann. Bd. 37, p. 144, 269, 373, 1889; Bd. 39, p. 440, 1890. 38) Fr. Pockels, Ueber den Einfluß des electrostatischen Feldes etc. Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen Bd. 39, 1893. 39) Specielle Fälle bei Fr. Neumann, Pogg. Ann. Bd. 31, p. 177 u. f., 1834; Vorlesungen etc. p. 179 u. f.; Das allgemeine Problem bei W. Voigt, II, p. 419. 40) De Saint Venant, Sav. étr. T. 14, p. 233, 1857; Journ. Liouville (2) T. 1, p. 89, 1856. 41) W. Voigt, I, p. 280 u. f., IV, p. 53 u. f.; Specielle Fälle bei C. Chree, Proc. London, T. 44, p. 214, 1888; G. C. Michaelis, Arch. Néerl T. 21, p. 387, 1886. 42) Specielle Fälle bei Fr. Neumann, l. c.; Das allgemeine Problem bei W. Voigt, II, p. 421; IV, p. 65. 43) W. Voigt, I, p. 282; IV, p. 68. 44) W. Voigt, I, p. 300; IV, p. 72. 45) W. Voigt, I, p. 300; IV, p. 73. Bezügliche Bemerkung bei G. Kirchhoff, Mechanik p. 415; Chree, l. c. 46) W. Voigt, III, p. 609. 47) De Saint Venant, Sav. étr. T. 14, p. 263 u. f., 1857; W. Voigt, III, p. 612. 48) W. Voigt, IV, p. 80. 49) l. c. p. 87. 50) l. c. p. 95. 51) C. Somigliana, Giorn. di Min. Crist. Petrogr. (1) T. 4, p. 1, 1893. 52) W. Voigt, I, p. 404. 53) G. Baumgarten, Pogg. Ann. Bd. 152, p. 369, 1874. 54) K. R. Koch, Wied. Ann. Bd. 18, p. 325, 1883. 55) J. Beckenkamp, Zeitschr. f. Kryst. Bd. 12, p. 419, 1887. 56) L. A. Coromilas, Inaug.-Diss., Tübingen 1877. 57) H. Niedmann, Zeitschr. f. Kryst. Bd. 13, 362, 1888. 58) A. Mallock, Proc. Roy. Soc. Bd. 49, p. 380, 1891. 59) H. Niedmann, l. c.; H. Vater, Zeitschr. f. Kryst. Bd. 11, p. 549, 1886. 60) F. Auerbach, Wied. Ann. Bd. 43, p. 61, 1891. 61) H. Vater, l. c. 62) W. C. Röntgen u. J. Schneider, Wied. Ann. Bd. 31, p. 1000, 1887. 63) H. Klang, Wied. Ann. Bd. 12, p. 321, 1881 (Beob. über Flußspath, nach den ungenauen Fr. Neumann'schen Torsionsformeln berechnet). 64) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg. Bd. 7, p. 1 u. 177, 1875 (Beob. über Steinsalz, gleichfalls mit den ungenauen Formeln berechnet); Wied. Ann. Bd. 35, p. 642, 1888 (Flußspath, Pyrit, Steinsalz, Sylvin); ib. Bd. 49, p. 719, 1893 (Chlorsaures Natron); ib. Bd. 31, p. 474, 1887 (Beryll und Bergkrystall); ib. Bd. 39, p. 412, 1890 (Kalkspath, unter Heranziehung von Biegungsbeobachtungen Baumgartens); ib. Bd. 40, p. 642, 1890 (Dolomit); ib. Bd. 41, p. 712, 1890 (Brasilianischer Turmalin); ib. Bd. 34, p. 981, 1888 (Topas und Baryt). 65) Jacobi, Crelle's Journ. Bd. 53, p. 281, 1857; K. Wesendonck, Wied. Ann. Bd. 35, p. 21, 1888. 66) K. Wesendonck, Wied. Ann. Bd. 36, p. 725, 1888. 67) W. Voigt, IV, p. 48; Wied. Ann. Bd. 38, p. 573, 1889. 68) W. Voigt u. P. Drude, Wied. Ann. Bd. 42, p. 537, 1891; W. Voigt, ib. Bd. 44, p. 170, 1891. 69) W. Thomson, Quart. Journ. of Math. T. 1, p. 57, 1857; N. Schiller, Journ. russ. phys. Ges. Bd. 11, p. 6, 1879; speciell für Krystalle: W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 36, p. 745, 1889.

Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz.

Von

E. Landau in Berlin.

Vorgelegt von D. Hilbert durch den vorsitzenden Secretär in der Sitzung am 3. Februar 1900.

§ 1.

Die Richtigkeit des Goldbachschen Satzes, daß sich jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellen lasse [1]), ist durch Herrn Stäckels [2]) Untersuchungen sehr wahrscheinlich geworden.

Da die Primzahlmenge des Intervalles 1, 2, . . n mit einem im Verhältnis zum wahren Werte für große n verschwindend kleinen Fehler $\frac{n}{\log n}$ ist [3]), so lautet Herrn Stäckels [4]) Näherungsformel $\mathfrak{G}_n$ für die Anzahl G_n der Zerlegungen der geraden Zahl n in die Summe zweier Primzahlen (wobei $p+q$ und $q+p$ als zwei verschiedene Zerlegungen zählen),

$$(1) \qquad \mathfrak{G}_n = \frac{n^2}{\log^2 n\, \varphi(n)},$$

ein Ausdruck, der trotz seiner Schwankungen mit n ins Unendliche

1) Briefe Goldbachs und Eulers vom 7. und 30. Juni 1742, Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle, B. 1, Petersburg 1843, S. 127 und 135.

2) „Ueber Goldbachs empirisches Theorem: Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden", Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1896, S. 292—299.

3) v. Mangoldt, „Ueber eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze", Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 119, 1898, S. 65—71.

4) l. c., S. 298.

wächst. Dabei bedeutet $\varphi(n)$ die zahlentheoretische Function, welche angiebt, wie viele der Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

zu n teilerfremd sind.

Im Folgenden soll zunächst eine die Goldbachschen Zahlen betreffende asymptotische Aufgabe behandelt werden; die Lösung derselben Aufgabe unter Zugrundelegung nicht der wahren Werte der Goldbachschen Zahlen, sondern der Näherungswerte (1) wird zu einer Verification der Resultate führen, zu denen Herr Stäckel gelangt ist.

§ 2.

Mit Hilfe des von den Herren Hadamard[1]) und de la Vallée-Poussin[2]) bewiesenen Satzes, daß die Summe der Logarithmen der Primzahlen $\leqq x$ asymptotisch gleich x ist, das heißt, daß der Quotient durch x sich für $x = \infty$ der Grenze 1 nähert, läßt sich der asymptotische Wert der summatorischen Function[3])

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} G_n$$

folgendermaßen bestimmen.

$H(x)$ ist die Anzahl aller Primzahlpaare p, q, für welche

$$p + q \leqq x$$

ist; dies ergiebt

$$H(x) = \sum_{p \leqq x} \pi(x-p),$$

wenn $\pi(x)$ die Primzahlmenge des Intervalles $1, 2, \ldots x$ bezeichnet. Die Summe ist über alle Primzahlen $\leqq x$ zu erstrecken.

In einer jüngst erschienenen Arbeit des Verfassers[4]) ist aus dem erwähnten Primzahlsatze die Folgerung gezogen: „Wenn $F(v, x)$ eine Function zweier positiver Argumente ist, welche den Bedingungen genügt:

1) „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", Bulletin de la société mathématique de France, t. 24, 1896, S. 199—220.

2) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la société scientifique de Bruxelles, t. 20, 2e partie, 1896.

3) Im Folgenden wird die obere Summationsgrenze nirgends als ganzzahlig vorausgesetzt; der Summationsbuchstabe hat hier also alle ganzzahligen Werte $\leqq x$, d. h. die Werte $1, 2, \ldots [x]$ zu durchlaufen.

4) „Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers", Bulletin de la société mathématique de France, t. 28, 1900, S. 25—38.

1) $F(\nu, x) \geqq 0$ für $1 \leqq \nu \leqq x$,

2) $\dfrac{F(\nu, x)}{\log \nu} \geqq \dfrac{F(\nu', x)}{\log \nu'}$ für $2 \leqq \nu \leqq \nu' \leqq x$,

3) Bei constantem ν ist

$$F(\nu, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du \right\},$$

(das heißt, der Quotient von $F(\nu, x)$ durch den Wert des Integrales nähert sich für $x = \infty$ der Grenze 0), so ist die über alle Primzahlen $\leqq x$ erstreckte Summe

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) \sim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du$$

(das heißt, beide Functionen sind asymptotisch gleich)."

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind im vorliegenden Falle für

$$F(\nu, x) = \pi(x - \nu)$$

erfüllt; also ist

$$H(x) \sim \int_2^x \frac{\pi(x-u)}{\log u}\, du = \int_2^{x-2} \frac{\pi(x-u)}{\log u}\, du,$$

da für $u > x - 2$

$$\pi(x - u) = 0$$

ist. Durch Betrachtungen, welche den beim Beweise des erwähnten Hilfssatzes angestellten analog sind, ergiebt sich, daß diese asymptotische Gleichung auch bestehen bleibt, wenn $\pi(x-u)$ durch $\dfrac{x-u}{\log(x-u)}$ ersetzt wird. Demnach ist

$$H(x) \sim \int_2^{x-2} \frac{x-u}{\log u \log(x-u)}\, du$$

$$= \int^{\frac{x}{2}} \frac{x-u}{\log u \log(x-u)}\, du + \int_{\frac{x}{2}}^{x-2} \frac{x-u}{\log u \log(x-u)}\, du.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite geht durch die Substitution $x - u = v$ in

$$\int_2^{\frac{x}{2}} \frac{v}{\log(x-v) \log v}\, dv = \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{u}{\log u \log(x-u)}\, du$$

über; also ist

$$H(x) \sim x \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u \, \log(x-u)} = x \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u \, (\log x + \log(1-\frac{u}{x}))}$$

$$= x \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u \, (\log x - \frac{2\vartheta u}{x})} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1),$$

also wenn $O(F(x))$ eine Function bezeichnet, deren Quotient durch $F(x)$ für große x nicht beliebig großer Werte fähig ist:

$$H(x) \sim \frac{x}{\log x} \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{du}{\log u} + O \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{u\,du}{\log u \log^2 x}$$

$$= \frac{x^2}{2 \log^2 x} + O\left(\frac{x^2}{\log^3 x}\right),$$

(2) $$H(x) = \sum_{n=1}^{x} G_n \sim \frac{x^2}{2 \log^2 x}.$$

§ 3.

Zum Vergleiche mit diesem streng bewiesenen Satze soll nunmehr der asymptotische Wert der entsprechenden Summe $\sum_{n=1}^{x} \mathfrak{G}_n$ berechnet werden, wo für gerades n $\mathfrak{G}_n$ den von Herrn Stäckel angegebenen Näherungswert (1) der Goldbachschen Zahl G_n bezeichnet. Die ungeraden n können ganz außer Betracht gelassen werden, da eine ungerade Zahl n auf eine Weise als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann, wenn $n-2$ eine Primzahl ist, sonst auf keine Weise, so daß

$$\sum_{n=1,3,5\,..}^{x} G_n \sim \frac{x}{\log x} = \left\{\frac{x^2}{\log^2 x}\right\},$$

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} G_{2n} = \sum_{n=1}^{x} G_n - \sum_{n=1,3,5\,..}^{x} G_n = H(x) - \left\{\frac{x^2}{\log^2 x}\right\} \sim \frac{x^2}{2 \log^2 x}$$

ist. Es handelt sich also um die Summe

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} \mathfrak{G}_{2n} = \sum_{n=2,4,6\,..}^{x} \frac{n^2}{\log^2 n \, \varphi(n)},$$

für die ebenfalls ein asymptotischer Wert hergeleitet werden soll. Zu diesem Zwecke wird es erforderlich sein, die Summe

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)}$$

für große Werte des Argumentes zu untersuchen.

Summen, in denen die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ auftritt, sind schon wiederholt behandelt worden. Schon Dirichlet hat den mittleren Wert von $\varphi(n)$ bestimmt[1]). Unter Benutzung des Umstandes, daß die summatorische Function

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{x} \varphi(n)$$

der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{x} \Phi\left[\frac{x}{k}\right] = \tfrac{1}{2}([x]^2 + [x])$$

genügt, fand er, daß

$$\Phi(x) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x^{\alpha})$$

ist, wo α eine zwischen 1 und 2 gelegene Zahl bezeichnet. Später hat Herr Mertens[2]) den Nachweis geführt, daß

$$\Phi(x) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x) \tag{3}$$

ist, und endlich zog Herr Cesàro[3]) Folgerungen über die asymptotischen Werte von Summen

$$\sum_{n=1}^{x} \varphi(n) G(n)$$

wo $G(n)$ eine mit n monoton veränderliche Function bedeutet. Dagegen ist meines Wissens für die Summe $\Psi(x)$ noch kein asymptotischer Wert ermittelt worden[4]). Die im Folgenden angewandte Methode gestattet es, die Annäherung weiter zu treiben, als es für den vorliegenden Zweck nötig ist, und da der Gegenstand an sich ein Interesse hat, soll die genauere Formel entwickelt werden.

Als Grundlage der Untersuchung dient der bekannte Ausdruck von $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = n \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

wo p alle Primfactoren von n durchläuft. Es ist also

---

1) „Ueber die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie", Abhandlungen der Berliner Akademie, 1849, S. 69–83, Werke, Band 2, S. 49–66.

2) „Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 77, 1874, S. 291.

3) Cesàro, „Sur les fondements du calcul asymptotique", Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris, B. 106, 1888, S. 1651–1654.

4) Die Betrachtungen am Schlusse der 16. Note in Herrn Cesàros Abhandlung „Sur diverses questions d'arithmétique" (Mémoires de la société royale des sciences de Liège, 2e série, t. 10, 1883, S. 169–170) haben keine Beziehung zu dieser Frage.

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n\prod_p(1-\frac{1}{p})} = \frac{1}{n}\prod_p \frac{p}{p-1} = \frac{1}{n}\prod_p\left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_l \frac{1}{\varphi(l)},$$

wo l alle Teiler von n durchläuft, welche durch kein von 1 verschiedenes Quadrat teilbar sind; in der That kommt jedes Glied

$$\frac{1}{\varphi(l)} = \frac{1}{\varphi(p_1 p_2 \ldots p_\varrho)} = \frac{1}{\varphi(p_1)\ldots\varphi(p_\varrho)} = \frac{1}{(p_1-1)\ldots(p_\varrho-1)}$$

einmal und nur einmal in dem auf alle Primfactoren von n erstreckten Produkte $\prod_p \left(1+\frac{1}{p-1}\right)$ vor, wenn man die Multiplication ausführt. Also ist

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} \sum_l \frac{1}{\varphi(l)}.$$

Kehrt man die Summationsfolge um, so hat l alle quadratfreien Zahlen $\leqq x$ zu durchlaufen; eine solche Summe soll stets durch $\sum'$ bezeichnet werden; n kann jedem unterhalb x gelegenen Vielfachen von l gleich sein. Es ergiebt sich somit

$$\Psi(x) = \sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(l)} \sum_{lm \leqq x} \frac{1}{lm} = \sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} \sum_{m=1}^{\frac{x}{l}} \frac{1}{m}.$$

Nun ist, wenn C die Eulersche Constante bezeichnet,

$$\sum_{m=1}^{\frac{x}{l}} \frac{1}{m} = \log x - \log l + C \pm 2\vartheta \frac{l}{x} \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1);$$

daraus folgt

$$\Psi(x) = \sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} (\log x - \log l + C) + O\sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} \frac{l}{x},$$

$$(4) \qquad \Psi(x) = (\log x + C)\sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} - \sum_{l=1}^{x}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} + \frac{1}{x}\, O\sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(l)}.$$

Die beiden Reihen $\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)}$ und $\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)}$ convergieren; es ist

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} = \left(1+\frac{1}{2\varphi(2)}\right)\left(1+\frac{1}{3\varphi(3)}\right)\left(1+\frac{1}{5\varphi(5)}\right)\cdots = \prod_p \left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right),$$

wo p alle Primzahlen durchläuft, also

$$= \prod_p \frac{p^2-p+1}{p(p-1)} = \prod_p \frac{p^3+1}{(p+1)p(p-1)} = \prod_p \frac{p^6-1}{(p^3-1)(p^2-1)p}$$

$$= \prod_p \frac{1-\frac{1}{p^6}}{\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = \frac{\frac{1}{6}\pi^2\zeta(3)}{\frac{1}{945}\pi^6}$$

$$(5) \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\varphi(l)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4};$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} = \sum_p \log p \sum_l{}' \frac{1}{l\varphi(l)}$$

wo l alle quadratfreien Vielfachen von p durchläuft, also

$$= \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \sum_m{}' \frac{1}{m\varphi(m)},$$

wo m alle quadratfreien, nicht durch p teilbaren Werte annimmt. Offenbar ist

$$\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right) \sum_m{}' \frac{1}{m\varphi(m)} = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4};$$

dies ergiebt

$$(6) \quad \sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1}.$$

Da die Gleichung (4) in erster Annäherung lehrt, daß

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} \sim \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x$$

ist, so ist a fortiori

$$(7) \qquad \sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(l)} \leqq \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} = O(\log x).$$

Dies folgt auch daraus, daß

$$\sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(l)} \leqq \prod_{p \leqq x} \left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{\prod_{p \leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

ist, ein Ausdruck, der bekanntlich die Größenordnung $\log x$ hat.

Aus der alleinigen Thatsache, daß

$$\Psi(x) = O(\log x)$$

ist, folgt

$$\sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} < \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} = O\left(\frac{\log x}{x}\right) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\};$$

in zweiter Annäherung lehrt also (4), daß

$$\Psi(x) = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} \log x + \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4}\left(C - \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1}\right) + \delta(x)$$

ist, wo

$$\lim_{x=\infty} \delta(x) = 0.$$

Mit Benutzung des soeben gefundenen Resultates

$$\Psi(x) = \alpha \log x + O(1),$$

wo α eine Constante ist, ergiebt sich weiter

$$\sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} < \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)} = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\Psi(n)-\Psi(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \Psi(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{\Psi(x)}{x+1}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\alpha \log n}{n(n+1)} + O\sum_{n=x+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{\alpha\log x}{x+1} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \alpha\int_{x}^{\infty} \frac{\log x}{x^2}dx - \frac{\alpha\log x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{\log x}{x} + \frac{1}{x}\right) - \frac{\alpha\log x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(8) \qquad \sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{l\varphi(l)} = O\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} < \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\log n}{n\varphi(n)} = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\log n}{n}(\Psi(n) - \Psi(n-1))$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \Psi(n)\left(\frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{n+1}\right) - \frac{\Psi(x)\log(x+1)}{x+1}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty}\left(-n\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) + \log n\right)\frac{\Psi(n)}{n(n+1)} - \frac{\alpha\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$= \alpha\int_{x}^{\infty} \frac{\log^2 x}{x^2}dx - \frac{\alpha\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)\right) - \frac{\alpha\log^2 x}{x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$(9) \qquad \sum_{l=x+1}^{\infty}{}' \frac{\log l}{l\varphi(l)} = O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Als Schlußresultat ergiebt sich also aus den Gleichungen (4) bis (9):

$$(10) \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4}\left(\log x + C - \sum_p \frac{\log p}{p^2-p+1}\right) + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

§ 4.

Sind $\Psi_1(x)$ und $\Psi_2(x)$ die auf alle ungeraden bezw. geraden Zahlen des Intervalles 1, 2, . . x erstreckten Summen $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$, so ist

$$\Psi_1(x) + \Psi_2(x) = \Psi(x);$$

der in § 3 dargelegte Gedankengang führt, indem man alle vorkommenden Summen auf ungerade Argumente beschränkt, zu

der Gleichung

$$\Psi_1(x) = \frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4}\log x + \gamma + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

wo γ eine Constante ist, auf deren Wert es für den gegenwärtigen Zweck nicht ankommt. Daraus folgt

$$(11) \quad \Psi_2(x) = \Psi(x) - \Psi_1(x) = \frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\log x + c + O\left(\frac{\log x}{x}\right);$$

c bezeichnet eine Constante.

Folglich ist

$$\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} \mathfrak{G}_{2n} = \sum_{n=2,4,6..}^{x} \frac{n^2}{\log^2 n\,\varphi(n)} = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu^2}{\log^2\nu}\left(\Psi_2(\nu) - \Psi_2(\nu-1)\right)$$

$$= \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu^2}{\log^2\nu}\,\frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\log\frac{\nu}{\nu-1} + \sum_{\nu=2}^{x} O\left(\frac{\log\nu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu^2}{\log^2\nu} - \frac{(\nu+1)^2}{\log^2(\nu+1)}\right)$$

$$+ O\left(\frac{\log x}{x}\,\frac{(x+1)^2}{\log^2(x+1)}\right)$$

$$= \frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\sum_{\nu=2}^{x}\frac{\nu}{\log^2\nu} + O\int_2^x \frac{dx}{\log^2 x} + O\int_2^x \frac{\log x}{x}\,\frac{x}{\log^2 x}\,dx + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$= \frac{105\,\zeta(3)}{\pi^4}\int_2^x \frac{x\,dx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

$$(12) \qquad \sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} \mathfrak{G}_{2n} \sim \frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4}\,\frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Der wahre Wert $\sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} G_{2n}$ ist, wie oben gefunden wurde, $\sim \frac{1}{2}\frac{x^2}{\log^2 x}$. *Von Herrn Stäckels Näherungsformel ausgehend gelangt man also nicht nur zu der richtigen Größenordnung der summatorischen Function, sondern die Constante, mit welcher* $\frac{x^2}{\log^2 x}$ *multipliziert ist, ist auch ungefähr gleich dem wahren Werte* $\frac{1}{2}$, *da*

$$\frac{105\,\zeta(3)}{2\pi^4} = 0{,}648..$$

ist. Also

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^{\frac{x}{2}} (\mathfrak{G}_{2n} - G_{2n}) \sim 0{,}148..\,\frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Ueber den bei Anwendung der Näherungsformel (1) für G_n selbst begangenen Fehler kann man hieraus keinen Aufschluß erhalten, da in der Summe (13) die positiven und negativen Fehler sich aufheben; man ersieht jedoch, daß die Summe der positiven Fehler die Summe der negativen Fehler übertrifft, sogar um soviel,

daß die algebraische Summe sämtlicher Fehler von derselben Größenordnung ist als die Summe der wahren Werte. Daß die Formel (1) zu große Werte liefert, ist Herrn Stäckel nicht entgangen; er hat deshalb noch eine zweite Näherungsformel[1]) angegeben, welche aber asymptotisch dieselbe summatorische Function ergiebt.

Wenn aus den asymptotischen Resultaten der vorliegenden Arbeit eine Folgerung auf die Werte der Goldbachschen Zahlen G_{2n} selbst gezogen werden kann, so würde es die sein, daß es sich vielleicht empfiehlt, Herrn Stäckels Näherungsformel mit der Constanten $\frac{\pi^4}{105\,\zeta(3)} = 0{,}772\ldots$ zu multiplizieren. Dann ist die summatorische Function asymptotisch gleich der summatorischen Function der Goldbachschen Zahlen; die algebraische Summe der Fehler ist alsdann von geringerer Größenordnung als die Summe der wahren Werte.

1) l. c., S. 298.

Ueber die Furchung unbefruchteter Eier unter der Einwirkung von Extractivstoffen aus dem Sperma.

Von

Dr. Hans Winkler in Tübingen.

Vorgelegt durch Herrn E. Ehlers in der Sitzung am 19. Mai 1900.

Es ist durch die Versuche verschiedener Forscher bekannt, daß sich unbefruchtete Eier gewisser Tiere durch die Einwirkung von Chemikalien zu mehr oder weniger weitgehender parthenogenetischer Furchung bringen lassen. Tichomirov (Boll. mens. Bachicolt., Padova 1886) konnte Eier von Bombyx durch 2½ Minuten langes Eintauchen in concentrirte Schwefelsäure (oder durch 10 Minuten andauerndes Bürsten) veranlassen, einige Teilungen einzugehen. Dasselbe erreichten Dewitz (Biol. Centralbl. VII. 1887, p. 93) durch Behandlung mit Sublimatlösung bei Froscheiern, und Koulagine (Zool. Anz. XXI. 1898 p. 653) an Eiern von Fischen und Amphibien durch Behandlung mit Antidiphterieserum. Hierher gehören auch die Beobachtungen Morgans über die Einwirkung concentrirten Meerwassers auf die Teilung unbefruchteter Eier (Arch. f. Entw. Mech. VIII, 1899, p. 448), R. Hertwigs über die Entwickelung des unbefruchteten Seeigeleies bei Strychninbehandlung, die Versuche von Klebs (Die Bedingungen der Fortpfl. bei einigen Algen u. Pilzen 1896, p. 245) über die Bildung von Parthenosporen infolge der Einwirkung von Salz- und Zuckerlösungen auf copulirende Spirogyrazellen, u. a., vor allem aber die Entdeckung Loebs (Amer. Journ. of physiol. III, 1899, p. 135), daß sich unbefruchtete Eier von Arbacia furchen und zu normalen Pluteis entwickeln, wenn man sie 2 Stunden lang der Einwirkung einer $MgCl_2$-Lösung von bestimmter Concentration aussetzt und dann in reines Seewasser zurückversetzt.

Auf Grund dieser Versuchsergebnisse erschien mir die Prüfung der Frage wünschenswert, ob nicht aus dem Sperma selbst Stoffe zu isoliren seien, welche den gleichen Erfolg hervorrufen könnten, wie die von den genannten Forschern benutzten Chemikalien. Ich stellte daher bei Gelegenheit eines 6-wöchentlichen Aufenthaltes an der zoologischen Station zu Neapel in diesem Frühjahre einige dahingehende Versuche an Seeigeleiern an. Freilich konnte ich, da meine Hauptaufgabe auf ganz anderem Gebiete lag, nur unverhältnismäßig wenig Zeit darauf verwenden, hatte auch infolge andauernd schlechter Witterung sehr unter Materialmangel zu leiden, sodaß meine Untersuchungen über diese Frage nicht über das Stadium von Vorversuchen hinausgekommen sind. Ich hätte daher jetzt auch noch nicht an Veröffentlichung gedacht, wenn mir nicht zufällig eine kurze Notiz von R. Dubois, Sur la spermase et l'ovulose (Compt. rend. hebdom. des séances d. l. Soc. de Biologie LII, 1900, p. 197) in die Hände gefallen wäre. Dubois gibt darin an, auf Grund — nicht beschriebener — Versuche zu der Ansicht gekommen zu sein, daß die Befruchtung das Ergebnis wäre der Einwirkung eines befruchtenden Fermentes (d'une zymase fécondante), und daß es ihm gelungen sei, aus dem Sperma von Echinus esculentus eine „zymase“ zu isoliren, die er „Spermase“ nennt, und die imstande sei, eine im Ei vorhandne Substanz, die „Ovulose“ zu modificiren. Da er der seltsamen Ansicht ist, daß Enzyme nicht diffundiren können, gibt er an, daß die Spermase auch nicht durch Diffusion oder Osmose in das Ei hineingelangen könne, und deshalb fehlen jedenfalls auch alle Versuche, die Einwirkung der Spermase auf unbefruchtete reife Eier direkt zu prüfen. So lange aber solche Experimente nicht vorliegen, sind die an und für sich recht interessanten Angaben über Fermente in Sperma und Ei für die uns beschäftigende Frage ohne Belang.

Dubois citirt nun in seiner Mitteilung eine Note von J.-B. Piéri, Un nouveau ferment soluble: l'ovulase in den Archives de zoologie expérimentale et générale, 3. sér., T. VII, 1899, p. XXIX, die mir leider völlig entgangen war. Piéris Versuche sind im August 1897 in Roscoff gemacht, sie decken sich teilweise mit den von mir angestellten, scheinen mir aber zum Teil durchaus nicht beweiskräftig zu sein. Sie bestehen in Folgendem: Gesundes Sperma von Strongylocentrotus lividus und Echinus esculentus wurde in einem Glas $^1/_4$ Stunde lang a) mit Meerwasser, b) mit destillirtem Wasser geschüttelt. Dann wird durch ein Papierfilter filtrirt und in das Filtrat sofort oder 4—10 Stunden nach der Darstellung frische Eier gebracht. Der Erfolg war bei a) Furchung der Eier bis zum

Morulastadium, bei b) gab es nur einige wenige Teilungen. Aus diesen Resultaten schließt Piéri, daß man den Spermatozoiden durch einfaches Schütteln ein lösliches Ferment, die „Ovulase", entziehen kann, das die Eigenschaft besitzt, die Furchung der Eier herbeizuführen.

Sehen wir uns diese Schlußfolgerung näher an, so ist zunächst klar, daß der Schluß auf die Fermentnatur des in dem Filtrate enthaltenen wirksamen Stoffes durch Nichts gerechtfertigt ist. Zum mindesten hätte versucht werden müssen, ob das gekochte Filtrat noch die gleiche Wirkung hervorbringt, und erst wenn dies nicht der Fall wäre, könnte man es als nicht unwahrscheinlich bezeichnen, daß die Wirkung des Filtrates auf der eines Enzymes beruhe. Aber auch die Versuchsanstellung Piéris erscheint mir nicht einwandfrei. Was zunächst die Versuche a) betrifft, so macht sich Piéri selbst den Einwurf, daß durch das Schütteln keineswegs notwendig alle Spermatozoen getötet werden. Der Procentsatz der dadurch abgetöteten dürfte sogar, bei ihrer außerordentlichen Kleinheit, ein recht geringer sein. Auch das einmalige Filtriren durch ein einfaches Papierfilter hilft so gut wie Nichts. Selbst bei 5—6maligem Filtriren durch dreifache Papierfilter finden sich nach meinen Erfahrungen noch einzelne Spermatozoen im Filtrat. Auch das vermag endlich dem Versuche noch keine Beweiskraft zu geben, daß Piéri erwähnt, die durch das Filter gegangenen Spermatozoen „étaient sans queue, immobiles, c'est-à-dire morts, autant qu'on a pu le constater au microscope". Die ganze zu den Versuchen benutzte Flüssigkeit kann ja doch nicht unter dem Mikroskop controllirt werden, und es muß deshalb als durchaus nicht ausgeschlossen angesehen werden, daß sich bei dem Versuche a) in dem Filtrate noch lebende Spermatozoen befunden haben. Damit verliert er jede Beweiskraft. — Bei dem Versuche b) kann man dagegen wol annehmen, daß durch das Schütteln mit destillirtem Wasser, vorausgesetzt, daß dessen Menge im Verhältnis zu der des hineingeschütteten Spermas eine ziemlich große war, alle Spermatozoen abgetötet wurden. Man kann also daraus schließen, daß sich in der That durch Schütteln mit destillirtem Wasser dem Sperma ein Stoff entziehen läßt, der mit den unbefruchteten Eiern in Berührung gebracht, diese zu einigen Teilungen veranlaßt. Freilich ist auch dieses Resultat nicht ohne weiteres verwendbar, da P. die Eier in destillirtes Wasser brachte, und wenn sich auch die Controlleier in destillirtem Wasser ohne „Ovulase" nicht furchten, sondern glasig wurden und zerplatzten, so hat doch die Einwirkung der Ovulase nicht auf normale, sondern

auf durch die Einwirkung des destillirten Wassers geschädigte Eier stattgefunden.

Ich gehe nun daran, meine eigenen Versuche, die wie gesagt völlig unabhängig von Piéri ausgestellt wurden, in Kürze zu beschreiben. Alles Nebensächliche, und die zahlreichen Versuche, die ich ohne sicheren Erfolg anstellte, werde ich dabei übergehen und mich nur an das halten, was sicher ist. Meine Versuchsobjekte waren Sphaerechinus granularis und Arbacia pustulosa. Sämtliche zu den Versuchen benutzten Gefäße und Instrumente wurden vorher unter dem Strome der Süßwasserleitung abgespült, um sie von allen durch irgend einen Zufall anhaftenden Spermatozoen zu reinigen, das Seewasser, in das die Eier ausgeschüttelt wurden, war aus demselben Grunde abgekocht worden, und auch die Tiere selbst wurden vor dem Oeffnen einige Minuten lang unter der fließenden Süßwasserleitung gründlich abgespült. Der Einwurf also, den sich Piéri selbst macht, daß ev. doch einige der benutzten Eier trotz der Vorsichtsmaßregeln befruchtet worden sein könnte, fällt für mich ohne weiteres weg, da bei allen meinen Culturen sich nicht ein einziges Mal ein Ei als befruchtet erwies.

Wurden die Spermatozoen einfach in Meerwasser durch Erhitzen auf ca. 50—60° C. abgetötet und Eier in die abgekühlte Flüssigkeit gebracht, so erfolgte Nichts. Wurden sie aber in destillirtes Wasser aufgenommen und etwa eine halbe Stunde lang unter öfterem Durchschütteln darin gelassen, so ergab es sich, daß die Flüssigkeit jetzt wirksam war. Natürlich wandte ich sie nicht so direkt an, sondern filtrirte erst 5—6 Mal durch ein 3-faches Papierfilter und fügte dann soviel des Rückstandes von eingedampftem Meerwasser hinzu, daß die Concentration der normalen Seewassers (ca. 4%) gleich war. In dieses Wasser gebracht, zeigten die unbefruchteten Eier sowol von Sphaerechinus als von Arbacia — jedes natürlich nur im Spermaextracte der eigenen Art — Furchungserscheinungen. Ich möchte aber gleich bemerken, daß keineswegs alle Eier reagirten, sondern nur ein nicht sehr großer Teil; mehrfach kam es auch vor, daß mit ein- und derselben Spermaflüssigkeit Eier des einen Individuums reagirten, die von einem anderen nicht. Ferner ging die Furchung im besten Falle nur bis zum Viererstadium regelmäßig vor sich, dann wurde sie ganz abnorm, und die vielen ungleich großen Furchungskugeln glitten, wol infolge der natürlich fehlenden Dottermembran, auseinander. Die Geschwindigkeit der Furchung war bei den so behandelten Eiern eine beträchtlich geringere als bei normal befruchteten. In den

selbstverständlich angestellten Controllversuchen zeigte niemals ein Ei ähnliche Furchungserscheinungen. Auf Einzelheiten der Furchungsbilder kann ich in dieser vorläufigen Mitteilung selbstredend nicht eingehen. Es sei nur erwähnt, daß das thatsächliche Vorhandensein von Mitosen durch Färbung mit der von Boveri in den Zellenstudien empfohlenen Schneiderschen Carminessigsäure constatirt werden konnte. Damit erst ist erwiesen, daß es sich um wirkliche Furchungs- und nicht um Zerfallserscheinungen handelt.

Bei dieser Darstellung des wirksamen Stoffes, durch Ausschütteln des Spermas in destillirtem Wasser, bleibt es unklar, ob der Stoff den Spermatozoen durch Osmose entzogen wird, oder aber ob diese bei der plötzlichen Uebertragung aus ca. 4 % Salzlösung in destillirtes Wasser nicht aufplatzen und ihren ganzen Inhalt in die umgebende Flüssigkeit treten lassen.

Ich versuchte die Darstellung noch auf einem anderen Wege mit Erfolg. Fr. Miescher gibt (Histochem. u. physiol. Arbeiten, Bd. II, 1897, p. 63) an, daß auf Lachssperma nichts so zerstörend wirke als eine 10—15 % Kochsalzlösung. Um bei den Seeigeln ähnlich zu verfahren, dampfte ich 400 ccm Meerwasser ein und nahm den Rückstand in 100 ccm Meerwasser auf; da das Seewasser bei Neapel ca. 4 % Salze enthält, erhielt ich so eine ca. 20 % Lösung, in die ich das Sperma ausschüttelte. Es verquoll sofort. Ich ließ unter öfterem Schütteln etwa ½ Stunde stehen, filtrirte und verdünnte das Filtrat mit destillirtem Wasser wieder zur normalen Concentration des Meerwassers. Wurden unbefruchtete Eier der Species, von der auch das Sperma stammte, in dieses Wasser gebracht, so zeigten auch sie die gleichen abnormen Furchungserscheinungen.

Dies sind im Wesentlichen meine Versuche. So lückenhaft sie sind, eins geht doch mit Sicherheit daraus hervor: daß thatsächlich im Sperma verschiedener Seeigel ein Stoff vorhanden ist, der, dem Wasser beigemengt, in dem unbefruchtete Eier derselben Species liegen, diese veranlaßt, einige Teilungen einzugehen. Die Natur dieses Stoffes bleibt vorläufig völlig dunkel. Ich habe nicht einmal mehr den nämlichen Versuch mit gekochter Flüssigkeit machen können, und es würde übrigens, auch wenn es sich zeigte, daß in der gekochten Flüssigkeit die erwähnten Furchungserscheinungen nicht eintreten, damit noch lange nicht erwiesen sein, daß der wirksame Bestandteil des Spermaextractes ein Ferment wäre. Ob es daher ein solches ist, was die Teilungserscheinungen auslöst, wie Piéri und Dubois annehmen, oder etwa Nuclein, zu welcher

Annahme Miescher (l. c. p. 95) neigt, muß ich völlig dahingestellt sein lassen. Weitere Versuche müssen das entscheiden.

Auf alle die wichtigen theoretischen Fragen, die sich an diese Thatsache knüpfen, näher einzugehen, verbietet mir der Charakter dieser Mitteilung. Nur einige wenige Bemerkungen seien mir gestattet.

Loeb schließt bekanntlich aus seinen Versuchen, daß das Spermatozoon gewisse Metallionen in das Ei einführe, die diesem fehlen; erst dadurch werde das Ei entwickelungsfähig. Mit schlagenden Gründen wendet sich Delage (Arch. de zool. expér. et gén. III. sér., T. 7, 1899, p. 525) gegen diese Auffassung, und mit Recht sieht Nathansohn (Ber. d. dtsch. bot. Ges. XVIII, 1900, p. 108) in der überraschenden Wirkung der $MgCl_2$-Lösung nur „eine gewisse Reizwirkung, deren Natur uns völlig unbekannt ist, und die zu demselben Resultat führt, wie das Eindringen des Spermatozoons". Offenbar befindet sich das Ei vieler Organismen in sehr labilem Gleichgewichte. Chemische und mechanische (Tichomirov) Reize und Temperaturerhöhung (Klebs, Nathansohn) sind imstande, dieses Gleichgewicht zu erschüttern und in dem Ei complicirte Vorgänge, Umsetzungen und Umlagerungen, auszulösen, die zur Entwickelung führen. Unsere Resultate reihen sich unmittelbar hier an, nur gewähren sie deshalb ein besonderes Interesse, weil man annehmen kann und muß, daß der im Sperma enthaltene, die Eier zur Furchung anregende Stoff auch bei der normalen Befruchtung mitwirkt. Im übrigen ist dem Wesen nach seine Wirksamkeit offenbar der des Magnesiumchlorides, Strychnins u. s. w. völlig analog und hat mit der Befruchtung an und für sich direkt nichts zu thun. Auch wenn es dereinst gelingen sollte, — und ich zweifle nicht, daß dies bei geeigneten Objekten und geeigneter Versuchsanstellung der Fall sein wird —, durch die Einwirkung eines aus dem Sperma isolirten Stoffes auf unbefruchtete Eier nicht nur anormale Furchungsstadien, sondern normale Organismen zu bekommen, auch dann wird man noch weit davon entfernt sein, etwa von „chemischer Befruchtung" reden zu dürfen. Die so erhaltenen Organismen werden nur mütterliche Eigenschaften haben und werden trotz des aus dem Sperma stammenden Stoffes ebenso als durch Parthenogenesis erzeugt anzusehen sein, wie etwa Marsiliapflänzchen, die man durch Temperaturerhöhung aus unbefruchteten Eiern gezogen hat. Es ist eine andere Frage, ob nicht den in dem Spermatozoon enthaltenen Stoffen eine specifische morphogene Wirkung zuzuschreiben ist, infolge deren die Zusammensetzung und Struktur des Eies und damit die Eigenschaften des künftigen Or-

ganismus modificirt werden, ähnlich wie die ganze Entwickelung der Echinidenlarve durch Lithiumsalze in typischer Weise modificirt wird. Dies ist eine Frage, die der experimentellen Entscheidung zugänglich ist.

Natürlich werde ich die oben geschilderten Versuche fortsetzen und ausdehnen, zum Teil bin ich bereits an anderem Material damit beschäftigt, gedenke aber besonders, zur Laichzeit des Lachses und im nächsten Frühjahr zu der des Frosches die Untersuchung wieder aufzunehmen.

Tübingen, 17. Mai 1900.

Ueber eine Verallgemeinerung der Taylorschen Reihe.

Von

G. Mittag-Leffler,

vorgelegt durch Herrn F. Klein in der Sitzung vom 19. Mai 1900.

Es sei

$$f_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0, 1, 2, \ldots \infty \\ \lambda_2 = 0, 1, 2, \ldots \infty \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots \infty \end{array}$$

eine $n$fach unendliche Folge von Functionen einer gewissen Anzahl von Variablen. Die Definition der mehrfachen Reihe

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$$

wird gewöhnlich in der Weise gegeben, daß man diese Reihe einer einfachen Reihe gleichsetzt, deren Glieder die verschiedenen Functionen $f_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$ sind, geordnet nach einem gegebenen Prinzipe. Gleichwohl empfiehlt es sich, für das Studium dieser Reihe einen anderen Gesichtspunkt einzuführen, der trotz seiner großen Einfachheit und trotz der Vorteile, die er bietet, doch nicht in verdientem Maaße die Beachtung der Mathematiker gefunden zu haben scheint.

Wir stellen die folgende Definition auf. Wir nehmen an, daß die Reihen

$$f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n = 0}^{\infty} f_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$$

$$f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-2}} = \sum_{\lambda_{n-1} = 0}^{\infty} f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_{\lambda_1} \qquad = \sum_{\lambda_2 = 1}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$f \qquad = \sum_{\lambda_1 = 0}^{\infty} f_{\lambda_1}$$

sämtlich convergent sind für ein bestimmtes Wertsystem der Variablen. Wir sagen dann, daß die Reihe

$$f = \sum_{\lambda_1 = 0}^{\infty} \sum_{\lambda_2 = 0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n = 0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$$

eine $n$fach unendliche Reihe ist, welche für dieses Wertsystem convergirt. Wir nehmen ferner an, daß die Reihen

$$f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}, \; f_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-2}}, \; \dots \; f_{\lambda_1}, f$$

sämtlich gleichmäßig convergent seien für einen gemeinsamen Bereich B im Innern des Existenzbereiches der Functionen $f_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$. Wir sagen dann, daß die Reihe f eine $n$fach unendliche Reihe ist, welche in dem Bereiche B gleichmäßig convergirt.

Nach Aufstellung dieser Definition können wir folgenden Satz aussprechen [1]).

Wenn die Functionen

$$f_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(x_1, \dots x_m) \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \dots \infty \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n = 0, \dots \infty \end{matrix}$$

für den Bereich B eindeutige und reguläre Functionen der Variablen $x_1 \dots x_m$ sind und die Reihe

$$f = \sum_{\lambda_1 = 0}^{\infty} \sum_{\lambda_2 = 0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n = 0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}(x_1 \dots x_m)$$

eine n-fach unendliche Reihe ist, welche für den Bereich B gleichmäßig convergirt, so stellt die Reihe für diesen Bereich B eine eindeutige reguläre Function der Variablen $x_1 \dots x_m$ dar.

1) Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes von Weierstrass in seiner Abhandlung „Zur Functionenlehre,“ § 2. Werke Bd. 2. S. 205—208.

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Begriff einer „n-fach unendlichen Reihe“ sehr verschieden ist von dem gewöhnlichen einer mehrfachen Reihe, und daß der Convergenzbereich der ersten im Allgemeinen viel weiter ist, als der der zweiten.

Setzen wir z. B.

$$f(x) = \frac{1}{1-x};$$

dann ist, wenn man mit ξ einen reellen Punkt zwischen 0 und -1 bezeichnet,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} f^{(\nu)}(\xi)(x-\xi)^{\nu},$$

und diese Gleichheit gilt für $|x-\xi| \leqq |\xi|$. Also ist

$$f(2\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} f^{(\nu)}(\xi)\xi^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}} f^{(\nu+\mu)}(0)\xi^{\nu+\mu}.$$

Wird die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}} f^{(\nu+\mu)}(0)\xi^{\nu+\mu}$$

als eine Doppelreihe im gewöhnlichen Sinne betrachtet, so hat man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}} f^{(\nu+\mu)}(0)\xi^{\nu+\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} f^{(\lambda)}(0)(2\xi)^{\lambda}$$

und diese Reihe wird nur für $0 \geqq \xi > -\frac{1}{2}$ convergiren. Wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}} f^{(\nu+\mu)}(0)\xi^{\nu+\mu}$$

dagegen als eine zweifach unendliche betrachtet wird, so findet die Convergenz statt, für

$$0 > \xi > -1.$$

In dieser Mitteilung wollen wir von unserem Begriffe einer n-fach unendlichen Reihe eine Anwendung machen auf den Fall, wo in die Functionen $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ nur eine einzige Variable x eingeht.

Wir haben in einer früheren Arbeit [1]) gelernt, wenn mit $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Stern bezeichnet wird und mit X ein endlicher Bereich im Innern von $\mathfrak{E}$, einen endlichen Stern E zu construiren, der im Innern von $\mathfrak{E}$ liegt und X in seinem Innern enthält. Wir

1) Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Première Note.

Act. Math. Tom. 23. Pag. 50—51.

haben ebenso gelernt, in der folgenden Weise einen neuen Stern $E^{(n)}$ zu construiren, der zu E gehört und noch X in seinem Innern enthält, wenn die positive ganze Zahl n hinreichend groß genommen wird[1]). Man betrachtet einen Radiusvector l mit a als Anfangspunkt. Indem man nun mit r eine hinreichend kleine positive Größe bezeichnet und den Vector auf die Länge $(n-1)\,r$ begrenzt, kann man es erreichen, daß jeder Kreis vom Radius r um einen beliebigen Punkt des begrenzten Vectors im Innern von E liegt. Indem man endlich auf l die Länge $n\varrho$ abträgt, wo ϱ die obere Grenze von r ist, und l einmal um a rotiren läßt, erhält man $E^{(n)}$. Indem wir sodann mit α eine reelle positive Größe kleiner als die Einheit bezeichneten und ϱ durch $\varrho_1 = \alpha\varrho$ ersetzten, erhielten wir einen neuen Stern $E_1^{(n)}$ der im Innern von $E^{(n)}$ liegt und X umfaßt, während α hinreichend groß angenommen wird[2]).

Für $\mathfrak{E}$ wählen wir jetzt den Stern A, der zu den Constanten $F(a)$, $F'(a), \ldots F^{(n)}(a), \ldots$ gehört und setzen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x-a}{n} \\ \xi_\mu = a+\mu\dfrac{x-a}{n}; \quad 0<\mu\leqq n-1 \end{cases}$$

wo x ein Punkt von X ist. Denn erhalten wir:

$$(2)\qquad \begin{cases} FA(x) = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^\lambda + \varepsilon \\ \varepsilon = \displaystyle\sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^\lambda. \end{cases}$$

Indem wir mit g die obere Grenze von $FA(x)$ bezeichnen, während x zu E gehört, und uns auf die Formeln stützen:

$$\left|\frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\right| \leqq g\varrho^{-\lambda}$$

$$\left|\frac{1}{\lfloor\!\underline{\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^\lambda\right| \leqq g\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^\lambda = g\alpha^\lambda,$$

erhalten wir weiter[3])

$$(3)\qquad |\varepsilon| \leqq g\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}.$$

1) Sur la réprésentation etc. Prem. Note p. 49—51.

2) Pag. 50. „Sur la réprésentation etc.“

3) cf. Formel (22) von „Sur la réprésentation etc. Prem. Note.“

Also ist die Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\, \xi^\lambda$$

gleichmäßig convergent für den Bereich X. Indem man sich erinnert, daß die Ableitung des Functions-Zweiges $FA(x)$ denselben Convergenzstern besitzt wie die Function selbst, schließt man, daß jede Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda+\nu)}(\xi_\mu)\, \xi^\lambda; \quad \mu = 0, 1, 2,$$

gleichmäßig convergirt für den Bereich X.

Man hat also:

$$(4) \quad \begin{cases} FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{\mu-1})\, \xi^{\lambda_1} \\ F^{(\lambda_1)}(\xi_{\mu-1}) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{\mu-2})\, \xi^{\lambda_2} \\ F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{\mu-2}) = \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{\mu-3})\, \xi^{\lambda_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}(\xi) = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(a)\, \xi^{\lambda_n} \end{cases}$$

wo die Reihen

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{\mu-1})\, \xi^{\lambda_1}, \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(a)\, \xi^{\lambda_n}$$

sämtlich gleichmäßig convergent sind für den Bereich X.

Das Ergebnis, zu dem wir so gelangt sind, wird sich folgendermaßen zusammenfassen lassen.

Es sei X ein beliebiger endlicher Bereich im Innern des Sternes A, der zu den Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ gehört. Dann kann man immer eine ganze positive Minimalzahl $\bar{n}$ so bestimmen, daß wenn n eine andere ganze positive Zahl ist, die nicht kleiner als $\bar{n}$ sein darf, die n-fach unendliche Reihe

$$(5) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

während sie für den Bereich X gleichmäßig convergirt, zugleich $FA(x)$ darstellt in diesem Bereich.

Liegt der Bereich X im Innern des Kreises[1]), der zu den Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ gehört, so hat man $\overline{n} = 1$ und die Reihe (5) wird für $n = \overline{n}$ eine Reihe erster Ordnung, die nichts anderes ist als die Taylorsche Reihe.

Man weiß, daß die Taylorsche Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}$$

einen solchen Convergenzbereich C (den Convergerzkreis) besitzt, daß die Reihe, während sie für jeden Bereich im Innern von C gleichmäßig convergent ist, außerhalb C niemals convergirt.

Giebt es für die allgemeine Reihe

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

einen Convergenzbereich von demselben Charakter?

Wir werden sehen, daß wenn die Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ beliebig gewählt sind, dies nicht der Fall ist außer für $n = 1, 2, 3$, daß man aber andererseits eine neue Reihe $n$ter Ordnung bilden kann, die für ein hinreichend großes n $FA(x)$ in einem beliebigen Bereiche im Innern von A darstellt und, indem sie die Taylorsche Reihe als Spezialfall enthält, noch die Eigenschaft hat, einen Convergenzbereich von der angegebenen Beschaffenheit zu besitzen.

Nehmen wir nämlich an, die Reihe (5) sei convergent für $x = x'$, und setzen wir:

$$\xi' = \frac{x'-a}{n}, \quad \xi'_\mu = a + \mu \xi'.$$

Da jede der Reihen

$$\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \, \xi'^{\lambda_n},$$

$$\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}(\xi'_1) \, \xi'^{\lambda_{n-1}} \ldots \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{\mu-1}) \, \xi'^{\lambda_1}$$

convergirt, so giebt es offenbar einen Functionszweig, der in der Umgebung von $x = a$ mit $FA(x)$ zusammenfällt und eindeutig und regulär bleibt im Innern des Bereiches C', welcher seinerseits die Gesamtheit der verschiedenen Punkte darstellt, die zu

1) Siehe S. 48 der ersten Note. Wir nennen ihn abwechselnd den Convergenzkreis der Constanten $F(a)$. $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ oder auch den Kreis der Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$

den Kreisen mit ξ'_μ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots n-1$) als Mittelpunkt und mit $|\xi'|$ als Radius gehören. Es sei jetzt x'' ein Punkt zwischen a und x' auf dem von a ausgehenden und durch x' gehenden Radiusvector. Setzen wir

$$\xi'' = \frac{x''-a}{n}, \quad \xi''_\mu = a+\mu\xi''$$

und nennen C'' die Gesamtheit der verschiedenen Punkte, die zu den Kreisen mit ξ''_μ als Mittelpunkt und mit $|\xi''|$ als Radius gehören. Man sieht, daß C'' immer im Innern von C' liegt, wenn der kürzeste Abstand zwischen $\xi''_{\mu-1}$ und der Begrenzung von C' noch größer bleibt als $|\xi''|$, daß aber C'' teilweise aus C' heraustritt, wenn dies nicht der Fall ist. Der erste Fall tritt immer ein für $n = 1, 2, 3$, der zweite kann immer eintreten bei passender Wahl von x'' für $n > 3$.

Es gilt also ersichtlich der Satz:

Die nfach unendliche Reihe

$$(6) \quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

verhält sich in dem allgemeinen Falle, wo die $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... $F^{(\mu)}(a)$,.. beliebige Constanten sind, welche die Cauchysche Bedingung erfüllen, hinsichtlich ihrer Convergenz verschieden für $n = 1, 2, 3$ und für $n > 3$. Im ersten Falle existirt ein Convergenzbereich B der Art, daß die Reihe gleichmäßig convergirt für jeden Bereich im Innern von B, aber zu convergiren aufhört für jeden Punkt außerhalb B. Diesen Convergenzbereich erhält man, indem man den Stern $E^{(n)}$ in Bezug auf A construirt (siehe Seite 4). Im zweiten Falle dagegen besitzt die Reihe keinen solchen Convergenzbereich B. Bei passender Wahl der Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... $F^{(\mu)}(a)$, ... kann der Fall eintreten, daß die Reihe für einen Punkt x' convergirt, ohne für einen anderen Punkt x'' auf der Strecke zwischen a und x' zu convergiren.

Bevor wir die Frage in Angriff nehmen, an Stelle von (5) eine andere Reihe zu bilden, welche für alle Werte von n bei beliebigen $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... $F^{(\mu)}(a)$, ... die Eigenschaft behält, einen solchen Convergenzbereich B zu besitzen, wie wir ihn bisher nur für die Fälle $n = 1, 2, 3$ erhalten haben, machen wir folgende Bemerkung.

Allerdings ist der für A genommene Stern $E^{(n)}$ ($n > 3$) nicht ein Convergenzbereich B in dem allgemeinen Falle, wo die $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... $F^{(\mu)}(a)$, ... beliebige Constanten sind, die der Cauchyschen Bedingung genügen. Werden diese Constanten aber in spezieller

Weise gewählt, so kann es selbst in den allgemeinsten Fällen vorkommen, daß der Stern $E^{(n)}$ für alle Werte von n seine Eigenschaft behält, ein Convergenzbereich B zu sein.

Nehmen wir z. B. an, die Wahl dieser Elemente sei eine solche, daß der Stern A nur eine einzige Spitze[1]) besitzt, nämlich $x = b$. Nehmen wir ferner der Einfachheit halber an, b sei ein reeller positiver Punkt, und der Mittelpunkt des Sternes A sei der Nullpunkt. Dann ist es evident, daß der Stern $E^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ genommen in Bezug auf A in diesem Falle ein solcher Convergenzbereich ist, wie wir ihn mit B bezeichnet haben. Bei der centralen Stellung in der allgemeinen Theorie der analytischen Darstellung einer monogenen Function, die man der Function $\frac{1}{1-x}$ zuschreiben kann, welche eben als Function zu einem solchen Stern A mit einer einzigen Spitze im Endlichen gehört, wird es nicht ohne Interesse sein, für den Fall eines Sternes A mit einer einzigen Spitze b die Construction der Sterne $E^{(n)}$ auszuführen.

Man verfährt leicht in folgender Weise. Es sei l ein beliebiger Vector; mit ξ, η bezeichnen wir die Coordinaten eines Punktes auf l, welcher zu $E^{(n)}$ gehört, und setzen

$$\xi = nu, \quad \eta = nv.$$

Dann läßt sich die geometrische Definition, die wir von $E^{(n)}$ gegeben haben, umformen in die folgende arithmetische Definition:

$$(mu - b)^2 + m^2 v^2 > b^2 \geq u^2 + v^2; \quad m = 1, 2 \ldots n-1.$$

Somit erhält man

$$\xi \leq n \frac{b}{2}$$

$$\left(\xi - \frac{mnb}{m^2-1}\right)^2 + \eta^2 > \left(\frac{nb}{m^2-1}\right)^2.$$

Der Stern $E^{(n)}$ bildet von dem Innern eines Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und nb als Radius den Teil, der sich links befindet gleichzeitig von der Geraden, die auf der reellen Axe senkrecht steht und durch den Punkt $x = n\frac{b}{2}$ geht, und von den Kreislinien mit den Mittelpunkten $\frac{mnb}{m^2-1}$ und den Radien $\frac{nb}{m^2-1}$; $m = 2, 3, \ldots n-1$. Die Fälle $n = 1, 2, 3, 4, 5$ finden sich gezeichnet in der dieser Mitteilung beigefügten Figur.

1) So nennen wir den Punkt, den wir bei der Definition des Sternes mit a_ν bezeichneten. Siehe „Sur la représentation etc. Prem. Note," p. 47.

Wir kehren jetzt zu der Aufgabe zurück, an Stelle von (5) eine andere Reihe $n$ter Ordnung zu bilden, welche stets, wenn die $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ... $F^{(\mu)}(a)$, ... beliebige die Cauchysche Bedingung erfüllende Constanten sind, einen Convergenzbereich B von der Beschaffenheit besitzt, daß die Reihe außerhalb B niemals convergirt, dagegen gleichmäßig convergirt für jeden Bereich im Innern von B. Es sei E ein Stern mit a als Mittelpunkt. Von ihm ausgehend construiren wir folgendermaßen einen neuen Stern $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Wir ziehen einen Vector l ausgehend von a als Mittelpunkt und construiren dann ein System von n Kreisen, deren Mittelpunkte $a, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ auf l liegen und wo jeder folgende immer durch den Mittelpunkt des vorhergehenden hindurchgeht. Die Radien bezeichnen wir mit $r, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$. Die Mittelpunkte $y_1, \ldots y_{n-1}$ sollen so gewählt werden, daß jeder folgende Kreis den vorhergehenden in den Punkten schneidet, in denen er selbst von den Tangenten aus dem Punkte a geschnitten wird, und daß $|y_1 - a| = r_1 = r$. Es ist klar, daß wenn der Radius r hinreichend klein gewählt wird, unser System von Kreisen immer zu E gehören wird. Indem wir endlich auf l die Länge $|y_{n-1} - a| + r_{n-1}$ abtragen, r durch seine obere Grenze ϱ ersetzen und l einmal um a rotiren lassen, erhalten wir $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Der Bereich bestehend aus den verschiedenen Punkten des Kreissystemes, das wir um l construirt haben, besitzt die wichtige Eigenschaft, daß wenn r' einen Wert von r kleiner als r'' bezeichnet, der zu r' gehörige Bereich stets im Innern des zu r'' construirten Bereiches gelegen ist. Der Uebelstand, der sich bei dem früheren mit $E^{(n)}$ bezeichneten Sterne herausstellte, ist also gehoben, und wenn $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ in Bezug auf den Stern A construirt wird, so erkennt man durch dieselben Betrachtungen wie die früher angestellten, daß die n-fach unendliche Reihe

$$(7) \qquad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{\lfloor\lambda_1 \lfloor\lambda_2 \cdots \lfloor\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\,(y_{n-1}-y_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}\,(y_{n-2}-y_{n-3})^{\lambda_3}\cdots(y_1-a)^{\lambda_n},$$

wo

$$(8) \qquad x = y_{n-1} + (y_{n-1} - y_{n-2}) = 2y_{n-1} - y_{n-2},$$

gleichmäßig convergirt für jeden Bereich im Innern von $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, und daß noch die Eigenschaft besteht, daß wenn die Reihe für einen

Punkt x convergirt, dieser Punkt niemals außerhalb $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ gelegen sein kann.

Wir wollen jetzt die Größen $y_1 \dots y_{n-1}$ arithmetisch durch die Variable x ausdrücken. Wir bezeichnen mit α_μ den Winkel zwischen dem Vector l und der Tangente von a an den Kreis mit dem Mittelpunkte y_μ. Dann ist

$$(9) \qquad \begin{cases} r_{\mu+1} = (r_1 + r_2 + \cdots + r_{\mu+1}) \sin \alpha_{\mu+1} \\ r_\mu \quad = (r_1 + r_2 + \cdots + r_\mu) \ \sin \alpha_\mu \\ \quad 2\, r_{\mu+1} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha_{\mu+1}\right) = r_\mu . \end{cases}$$

Also

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu} = \frac{\sin \alpha_{\mu+1}}{1 - \sin \alpha_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_\mu} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha_{\mu+1}\right)}$$

und wegen

$$1 - \sin \alpha_{\mu+1} = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha_{\mu+1}\right)$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \sin \alpha_{\mu+1} = -\frac{1}{4} \sin^2 \alpha_\mu + \frac{1}{4} \sin \alpha_\mu \sqrt{8 + \sin^2 \alpha_\mu} \\ \quad \sin \alpha_1 = 1, \end{cases}$$

das heißt:

$$\sin \alpha_1 = 1$$
$$\sin \alpha_2 = \tfrac{1}{2}$$
$$\sin \alpha_3 = \frac{\sqrt{33} - 1}{16} \qquad \text{u. s. w.}$$

Machen wir noch die Bemerkung, daß wenn man einmal $\sin \alpha_{\mu+1}$ aus der Formel (10) erhalten hat, sich der Radius $r_{\mu+1}$ nach der Formel bestimmt

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_\mu}{\sin \alpha_{\mu+1}}$$

oder

$$r_{\mu+1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^\mu \frac{r}{\sin \alpha_{\mu+1}} .$$

Die Berechnung von $y_{\mu+1} - y_\mu$ vollzieht sich unmittelbar.

Man hat:

$$\frac{y_{\mu+1} - y_\mu}{x - a} = \frac{r_{\mu+1}}{r_1 + r_2 + \cdots r_{n-1} + r_{n-1}} = \frac{r_{\mu+1}}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_{n-1}}$$
$$= \frac{2^{n-\mu-2} \sin^2 \alpha_{n-1}}{(1 + \sin \alpha_{n-1}) \sin \alpha_{\ +1}} .$$

Die Reihe (7) wird demnach

$$(11)\quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda\;)}(a)(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

wo

$$(12)\quad \begin{cases} c_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = \\ \left(\dfrac{\sin^2\alpha_{n-1}}{1+\sin\alpha_{n-1}}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sin\alpha_{n-1}}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}}{\underline{|\lambda_1}\;\underline{|\lambda_2}} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{2}{\sin\alpha_{n-1}}\right)^{\lambda_3}}{\underline{|\lambda_3}} \\ \cdot \dfrac{\left(\dfrac{2^2}{\sin\alpha_{n-3}}\right)^{\lambda_4}}{\underline{|\lambda_4}} \cdots \dfrac{\left(\dfrac{2^{\nu+2}}{\sin\alpha_{n+1-\nu}}\right)^{\lambda_\nu}}{\underline{|\lambda_\nu}} \cdots \dfrac{(2^{n-2})^{\lambda_{n-1}+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_{n-1}}\;\underline{|\lambda_n}} \\ c_{\lambda_1} = \dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}}. \end{cases}$$

Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, daß es außer dem Kreis C und dem Stern A, die zu den Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ gehören, noch andere Sterne $A^{(\frac{1}{n})}$ giebt, die mit diesen Constanten eng verknüpft sind. Wir werden Gelegenheit nehmen, in einer weiteren Arbeit neue Sterne von dieser Beschaffenheit zu finden.

In die Bestimmung aller dieser Sterne geht ein willkürliches Element ein, das für den Stern A nicht existirt. Aus diesem Grunde wird es sich empfehlen, diesen Stern abwechselnd mit der oben eingeführten[1]) Bezeichnung „Stern A, der zu den Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ gehört" auch zu nennen den „Hauptstern der Constanten $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a)$."

Das eben gewonnene Resultat läßt sich in den folgenden Satz zusammenfassen.

Lehrsatz. Es seien $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ beliebige Constanten, welche der Cauchyschen Bedingung genügen, und es sei

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

eine $n$fach unendliche Reihe, in welcher $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ gewisse numerische, von den Elementen $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ sowie von x unabhängige Coefficienten bezeichnen. Diese Coefficienten kann man immer so bestimmen, daß die Reihe folgende Eigenschaften erhält.

---

1) Siehe „Sur la représentation etc. Première Note" p. 48.

Sie besitzt einen Convergenzstern $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *von der Beschaffenheit, daß die Reihe gleichmäßig convergirt für jeden Bereich im Innern von* $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, *aber niemals convergirt außerhalb von* $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Dieser Stern $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *ist in den Hauptstern der Elemente* $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$ *eingeschrieben* [1] *und für* $\mathrm{n} \geqq \overline{n}$, *wo die ganze positive Zahl* $\overline{n}$ *hinreichend groß genommen werden soll, enthält er seinerseits in seinem Innern jeden beliebigen endlichen Bereich, der zum Innern von* A *gehört.*

Wenn $\mathrm{n}' < \mathrm{n}$, *ist* $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ *in* $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *eingeschrieben.*

Die Gleichung

$$(13) \qquad FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

gilt überall im Innern von $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Für $n = 1$ *geht die Reihe in die Taylorsche Entwicklung über.*

1) Ein Stern K' ist in einen anderen K eingeschrieben in dem Falle, wo die beiden Sterne gemeinsame Spitzen haben und wo alle Punkte von K' auch zu K gehören.

Magellanische Anneliden

gesammelt während der schwedischen Expedition nach den Magellansländern,

bearbeitet

von

E. Ehlers.

Vorgelegt in der Sitzung vom 30. Juni 1900.

Der Aufforderung des Herrn Théel in Stockholm, die auf der von Herrn Nordenskjöld geleiteten Expedition nach Patagonien gesammelten, im naturhistorischen Museum in Stockholm aufbewahrten Anneliden zu bearbeiten, bin ich gerne nachgekommen, in der Erwartung, weitere Einsicht in die litorale Annelidenfauna des patagonischen und chilenischen Gebietes, wie sie mir durch die Bearbeitung der von Herrn Dr. Michaelsen im gleichen Bezirk zusammengebrachten Sammlung bekannt geworden war, zu gewinnen und damit eine neue Vorarbeit zu erhalten für eine zusammenfassende Darstellung der Annelidenfauna der südlichsten Küsten Amerikas, die ich demnächst hoffe vorlegen zu können.

Die in 301 Gläsern enthaltene Sammlung, die auf der Nordenskjöldschen Expedition von den Herrn Ohlin und Åkerman gemacht war, enthielt fast durchgehend für systematische Zwecke gut in Weingeist conservirte Stücke. Die Orte, an denen gesammelt wurde, sind in Svenska Expeditionen til Magellansländerna Bd. II No. 1 aufgeführt.

Die Zusammenstellung, die ich im Folgenden von den Borstenwürmern gebe, die ich in der Sammlung fand, schließt sich zunächst an meine Bearbeitung der von Herrn Michaelsen gesam-

melten Anneliden an. Die dort[1]) bereits aufgezählten Arten habe ich hier nur mit dem Namen ohne weitere Literaturnachweise gegeben, soweit diese nur eine einfache Wiederholung gewesen wären. Waren dafür Zusätze nöthig, so sind solche gemacht. Für die Thiere, die in der Michaelsenschen Sammlung nicht vorhanden waren, habe ich Literaturangaben hinzugefügt. Die bislang unbeschriebenen Arten sind hier nur kurz gekennzeichnet. Eine mit Abbildungen versehene und ausführlichere Beschreibung bleibt der vorhin erwähnten umfassenderen Darstellung, für die mir noch andere Materialien zugegangen sind, vorbehalten.

Die folgende Zusammenstellung umfaßt 84 Arten, von denen 21 bisher als Arten oder Varietäten unbeschrieben sind; sie ist damit reicher als die Ausbeute Michaelsens, die 67 Arten mit 23 bisher unbekannten enthielt; das hängt zum Theil mit der größeren Ausdehnung des Gebietes zusammen, auf dem Nordenskjölds Expedition sammelte.

Wie sich beide Sammlungen vortheilhaft ergänzen, ergiebt sich daraus daß die Nordenskjöldsche Sammlung Vertreter von Familien und Gattungen enthält, die in der Ausbeute der hamburger magalhaensischen Sammelreise fehlen; das sind die Familien der Amphinomiden, Amphicteniden und Scalibregmiden, die Gattungen Euphrosyne, Sthenelais, Leanira, Genetyllis, Parautolytus n. gen., Eunice, Ninoe, Aracoda, Pectinaria, Artacama, Pista, Trichobranchus, Polycirrus, Vermilia.

Daß auch damit ein vollständiges Bild der Annelidenfauna des magalhaensischen Küstengebietes noch nicht gegeben wird, will ich nebenher bemerken.

Von Arten, die nach unserer jetzigen Kenntnis ihrer Verbreitung als „bipolare“ in Anspruch genommen werden können, kommen zu den früher von mir als solche bezeichneten hinzu: Scalibregma inflatum R., Pectinaria belgica Pall., Artacama proboscidea Mlmgn.; daran schließen sich Varietäten von Euphrosyne cirrata S. und Nereis pelagica L.

Amphinomidae.

Euphrosyne.

Euphrosyne notialis n. sp.

Aehnlich der Euphrosyne borealis Örst. 29 Segmente. Carunkel einfach. Dorsale Borsten mit graden glatten und geschwun-

1) Hamburger Magalhaensische Sammelreise. Hamburg 1897.

genen feilkerbigen Gabelzinken, länger als die Kiemen, durch eine Lücke vom Bündel der ventralen graden glatten Borsten getrennt. Sechs kurze, 2—3ästige Kiemen mit einfachen Endfäden. Rückencirren einfach, der laterale vor dem Zwischenraum der 2. und 3. Kieme.

Fundort: Cap Valentyn. 150 (100) Faden. 12. III. 1896. Geröll mit leeren Schalen.

Euphrosyne cirrata S. var. magellanica.

Unterscheidet sich von Euphr. cirrata S. des Nordmeeres durch kürzeren Endfaden des unpaaren Fühlers.

Fundort: Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 1896. Geröll mit leeren Schalen. — Cap Valentyn. 150 Fad. 12. III. 1896.

Euphrosyne armadilloides n. sp.

Aehnlich der Euphr. armadillo S. 25 borstentragende Segmente. Carunkel einfach. Dorsale Borsten mit glatten Zinken, bis zum ventralen Bündel reichend. Fünf Kiemen mit dickem Stamm, 2—3 kurzen Zweigen und dicht gedrängten, terminal verdickten Aesten. Rückencirren einfach, der laterale vor dem Zwischenraume der 2. und 3. Kieme.

Fundort: Punta Arenas. 15 Faden. 14. XII. 95.

Euphrosyne setosissima n. sp.

21 Segmente; Carunkel einfach glatt. Rückenborsten sehr lang mit graden glatten und geschwungenen feilkerbigen dicht zusammenliegenden Gabelzinken, bis zum ventralen Bündel reichend. Fünf Kiemen, einfache Fäden, kaum halb so lang als die Borsten; Rückencirren länger als die Kiemen, der laterale vor dem Zwischenraume der 2. und 3. Kieme.

Fundort: Puerto Harris. 15 Fd. 11. III. 1896. Geröll mit leeren Schalen.

Aphroditidae.

Harmothoe spinosa Kbg.

Fundorte: Punta arenas. 7—8 Fad. 4. u. 5. XII. 95. 20 Fad. 16. XII. 94. — Rio Seco. 10—20 Fad. 24. I. 96. — Bahia inutil. 20—30 Fad. 23. 1. 96. — Romanche Bay. 11 Fad. 4. II. 96. — Lennox Cove. 10—12 Fad. 5. II. 96. — Isla Nueva. 8 Fad. 7. II. 96. — Puerto Toro. 20—25 Fad. 11. II. 96. — Ushuaia. 12—15 Fad. 11. II. 96. — Martha Bank. 100 Fad. 16. III. 96. — Fortescue Bay. 10—12 Fad.

25. III. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96. — Borja Bay. 10 Fad. 7. IV. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96. Admiralty Sound. 7. III. 96. — Puerto Condor. — Cap Valentyn. 150 Fad. 12. IV. 96. — Hope Harbour. 6—10 Fad. 3. IV. 96. — Navarino. 10 Fad. 13. V. 96. — Katanashuaia. 10—12 Fad. 28. V. 96. — Halberton Harbour. 6 Fad. 11. V. 96.

Lagisca vesiculosa Gr.

Fundort: Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96.

Hermadion magalhaensi Kbg.

Fundorte: Puerto Madryn. 5 Fad. 8. XI. 95. 1—3 Fad. 9. XI. 95. — Sandb. 9. II. 95. — Fortescue Bay. 10—12 Fad. 25. III. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96. — Punta Arenas Ebbestrand. 2. XII. 95. — Bahia Inutil. 11—15 Fad. 23. 1. 96. — Lennox Island. 10—20 Fad. 7. II. 96. — Isthmus Bay. Ebbestrand. 29. III. 96.

Hermadion molluscum Ehl.

Fundorte: Punta arenas. Strand. 5. XII. 95. 20 Fad. 16. XII. 95. — Cap Valentyn. 150 Fad. (100). 12. III. 96. — Bahia inutil. 20—30 Fad. 23. I. 96. — Borja Bay. 10 Fad. 7. IV. 96.

Hermadion ambiguum n. sp.

Zwischen Herm. magalhaensi Kbg. und molluscum Ehl. 39 Rudertragende Segmente. Kopflappen weiß, Rückenfläche braun mit je zwei feinen weißen Querlinien auf den Segmenten; 15 Paare von weichen, fast glatten Elytren, am 1. 3. 4. 6. . . . 22. 25. 28. 30. Ruder, die Rückenfläche ganz mit Ausnahme der präanalen Segmente deckend, Borsten und Rückencirren frei lassend. Kopflappen vorn tief eingeschnitten mit großen Facialtuberkeln, Fühler subterminal kaum verdickt, mit feinen Endfaden, papillös; Subtentakel groß glatt; Fühlercirren wie die Fühler. Borsten des oberen Ruderastes breiter als die des unteren, stumpf, blättrig gesägt; die des unteren schlank dünn, zweizähnig, Endstrecke blättrig gesägt. Rückencirren wie die Fühler, fast glatt; Bauchcirren einfach glatt. Elytren mit einem kleinen Felde von niedrigen Warzen und vereinzelten, submarginalen, fadenförmigen Papillen.

Fundort: Puerto Madryn. 5 Fad. 8. XI. 95. 1—3 Fad. 9. XI. 95. Sandb. Ebbestr. 9. XI. 95.

Enipo antarctica Kbg.

Fundort: Punta arenas. Ebbestrand. 6. XII. 95.

Sthenelais blanchardi Kbg.

Kinberg. Freg. Eugenies Resa. Zoologi. Annulater Tafl. VIII. Fig. 37.

Fundort: Puerto Madryn. Sandboden. Ebbestrand. 9. XI. 95.

Leanira quatrefagesi Kbg.

Kinberg Öfvers. K. Vetensk. Ak. Förh. Årg. 12. 1855. pg. 388. Freg. Eugenies Resa. Tafl. IX. Fig. 42.

Fundort: Puerto Augusto. 10 Fad. 25. III. 96.

Nephthydidae.

Nephthys virgini Kbg.

Fundorte: Puerto Madryn. 2—3 Fad. 9. XI. 95. — Punta Arenas. 7—8 Fad. 4. XII. 95. — Gente grande. 5 Fad. 26. XII. 95. — Voilier Cove. 10 Fad. 3. II. 96. — Romanche Bay. 11 Fad. 4. II. 96. — Puerto toro. 20—25 Fad. 11. II. 96. — Harberton Harbour. 10—20 Fad. 14. II. 96. — Martha Bank. 100 Fad. 16. III. 96. — Puerto Augusto. 10 Fad. 25. III. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Ultima Esperanza. 4—5 Fad. 2. IV. 96. — Tribune Bank. — Navarino. 10 Fad. 3. V. 96. — Katanashuaia. 10—12 Fad. 28. V. 96.

Phyllodocidae.

Genetyllis brevis n. sp.

Körper kurz linear, 41 Borstentragende Segmente; Kopflappen mit dem ersten Segmente verschmolzen, vier frontale, von einander getrennte kurze Fühler; augenlos. Jederseits zwei Paar schlanke Fühlercirren, das erste am ersten mit dem Kopflappen verschmolzenen, das zweite am zweiten Segment, beide mit einem Borstenbündel. Ruder schlank, mit einem Fächer zusammengesetzter Borsten mit schlanken Endgliedern; Rückencirren auf großen Wurzelgliedern breit eiförmige Blätter, imbricat, die Rückenfläche freilassend; Bauchcirren lang oval.

Fundort: Puerto Condor. 50 Fad. 26. II., reichlich leere Schalen.

Eulalia picta Kbg.

Fundort: Fortescue Bai. 10—12 Fad. 25. III. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Puerto Condor. 1896.

Eulalia strigata n. sp.

Körper lang gestreckt, 325 Rudertragende Segmente; dorsaler und ventraler medianer Längsstreifen heller als die dunkel gefärbten, tief eingeschnittenen Seitentheile. Kopflappen stumpf eiförmig, 4 kurze frontale, 1 vertikaler Fühler; 2 schwarze Augen neben diesem. Die beiden ersten Segmente sehr kurz, jederseits mit 4 schlanken, fadenförmigen Fühlercirren, von denen die hinteren länger als die vorderen sind. Ruder kurz kegelförmig mit Fächer von zusammengesetzten Borsten, deren Endglieder fadenförmig dünn auslaufen; Rückencirren auf niederen Höckern über dem Ruder, birnförmige Blätter über die Borsten hinausreichend, imbricat, die Rückenfläche frei lassend; Bauchcirren auf dem Ruderaste, eiförmige Blätter länger als das Ruder.

Fundort: Puerto Madryn. 9. XI. 95.

Eteone spathocephala Ehl.

Fundorte: Lagatoaia. 10 Faden. 10. II. 96. — Ultima Esperanza. 6—7 Fad. 4. IV. 96.

Eteone rubella n. sp.

Fast bandartig, 19 mm lang; 85 Körpersegmente, röthlich mit dunklerem dorsalen Längsstreif auf der Vorderstrecke. Kopflappen vorn dreieckig zugespitzt mit 4 kleinen, getrennten frontalen Fühlern, 2 Augen. Segmente kurz, erstes jederseits mit zwei kurzen Fühlercirren. Ruder kurz, zweilippig; Borsten zusammengesetzt mit schlankem Endglied; Rückencirrus auf niedrigem Höcker ein eiförmiges dickes Blatt von der Länge des Ruderastes; Bauchcirrus längsovales Blatt, kürzer als der Ruderast. Ausgestülpter Rüssel dick keulenförmig mit papillenloser Oberfläche und 10 niedrigen Randpapillen am Eingange.

Fundort: Santa Cruz, 50° s. Br. 68° w. L. Meeresufer.

Eteone crassifolia n. sp.

Lang, fast fadenförmig, 71 mm lang, 210 Körpersegmente; grünlich braun mit querer dunkler Bänderung. Kopflappen stumpf kegelförmig, mit vier kurzen, getrennten frontalen Fühlern, augen-

los. Erstes Segment kurz, jederseits mit zwei kurzen Fühlercirren. Ruder kurz abgestumpft kegelförmig mit zwei Lippen; Borsten zusammengesetzt mit kurzem Endglied; Rückencirrus ein kurzes dickes eiförmiges Blatt auf großem Grundgliede, wenig länger als das Ruder. Bauchcirrus lanzettförmig, so lang als das Ruder.

Fundort: Puerto Harris, 15—20 Fad. 11. III. Geröll mit leeren Schalen.

Syllidae.

Trypanosyllis gigantea McJnt.

Fundorte: Bahia Inutil. 20—30 Fad. 23. 1. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96. — Puerto Condor. 96. Cap Valentyn. 150 Fad. 12. III. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96.

Syllis variegata Gr.

Fundorte: Puerto Madryn. 5 Fad. 8. XI. 95. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96. — Cap Valentyn. 150 Fad. 12. III. 96.

Syllis sclerolaema n. sp.

Körper kurz fadenförmig, 29 ^{mm} lang, 66 Körpersegmente, vorn durchscheinend. Kopflappen breiter als lang, 4 Scheitel- und 2 Stirnaugen; 2 pigmentirte Nackenorgane; Fühler lang, fast rosenkranzförmig kurz gegliedert; Palpen getrennt, groß, länger als der Kopflappen. Fühlercirren auf großem Grundgliede, lang, wie die Fühler gegliedert. Ruder mit 2 Lippen, Borsten kurz, dick, zusammengesetzt, mit einem vom Schaft kaum getrennten kurzen, zweizähnigen Endgliede; Rückencirren alternirend ungleich lang, länger als die Körperbreite, auf großem Grundgliede, gegliedert wie die Fühler; Bauchcirren kegelförmige Fortsätze länger als das Ruder. Analsegment mit langen Cirren und Schwänzchen. — Rüsselröhre mit weichem Papillenkranz und einfachem Zahn am Eingange, dickwandig braun, bis ins 10. oder 12. Segment; Magen in 6—7 Segmenten; helles dickwandiges Uebergangstück, zwei Anhangdrüsen.

Fundorte: Ultima Esperanza. 7—16 Fad. Geröll mit Algen. 5. IV. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. Geröll mit leeren Schalen. 11. III. 96. — Cap Valentyn. 150 (100) Fad. Geröll mit leeren Schalen. 12. III. 96.

Eusyllis kerguelensis. McJnt.

Fundort: Lennox Island. 10—25 Fad. 7. II. 96.

Sphaerosyllis retrodens Ehl.

Fundort: Stewart Harbour. 20 Fad. Felsen und Algen. 3. II. 96.

Autolytus simplex n. sp.

Farblos, 6^{mm} lang, 54 Körpersegmente, von denen die hinteren 12 ♀ epitok und mit eigenem Kopflappen ablösbar sind. Kopflappen quer oval, nach vorn dreieckig erweitert, 4 linsentragende Augen, 3 lange ungegliederte Fühler; Palpen nicht vorragend. Erstes Segment nicht gewölbt; 4 lange ungegliederte Fühlercirren auf großen Wurzelgliedern. Atoke Ruder zweilippig, zusammengesetzte Borsten mit zweizähnigen, $0{,}009^{mm}$ langen Endgliedern; epitoke Borsten länger, zusammengesetzt, mit $0{,}004^{mm}$ langen Endgliedern; Rückencirren ungegliedert auf langen Wurzelgliedern, kürzer als die Segmentbreite, der des ersten Ruders länger als die folgenden. Bauchcirren fehlen. Zwei lange Aftercirren, kein Schwänzchen. — Epitoker Kopflappen mit 3 kurzen Fühlern, 2 kleinen Augen. — Rüsselröhre unbewaffnet, gewunden, im 4.—8. Segment; Magen im 9.—14. Segment.

Fundort: Puerto Harris, Ebbestrand. 11. III. 96.

Parautolytus fasciatus n. gen. n. sp.

Parautolytus n. gen.

Von Autolytus unterschieden durch getrennte Palpen auf der Unterseite des Kopflappens, die Anwesenheit von Bauchcirren, eine nur geknickte, nicht gewundene Rüsselröhre mit gezähneltem Ring am Eingange.

Parautolytus fasciatus n. sp.

Ueber 80 Segmente und 11^{mm} Länge; vorn dorsal quer schwarzgrün gebändert. Kopflappen mit getrenntem Scheitel- und Stirntheil, jederseits zwei großen übereinander stehenden Augen, drei an der Basis verdünnten, ungegliederten langen Fühlern; zwei von einander getrennten, etwas über den Stirnrand vorragenden Palpen. — Erstes Segment dorsal frei, jederseits mit zwei langen Fühlercirren auf großen Wurzelgliedern. Ruder zweilippig, Borsten zusammengesetzt, mit zweizähnigen $0{,}014^{mm}$ langen Endgliedern. Rückencirren ungegliedert, lang, mit Wurzelglied hoch über dem Ruderaste, Bauchcirren einfach, dreieckig zugespitzt, länger als der Ruderast. — Dickwandige vorn gezähnelte Rüsselröhre, geknickt im 3.—8., Magen im 8.—21. Segment.

Fundort: Rio Seco. 10—20 Fad. 24. I. 96.

Lycoridae.

Nereis elegans. Kbg.

Kinberg. Annulata nova. Öfvers. K. Vet. Akad. Förh. 1865. pg. 175.

Fundorte: Lennox Cove. 10—20 Fad. 3. II. 96. — Puerto Novo Ebbestrand. 8. II. 96.

Nereis magalhaensi Kbg.

Fundorte: Puerto Madryn. 2—3 Fad. 9. XI. 95. 5 Fad. 8. XI. 95. — Sandboden Ebbestr. 9. XI. 95. — Punta Arenas. 7—8 Fad. 4. XII. 95. Ebbestrand 6. XII. 95. 15 Fad. 14. XII. 95. 20 Fad. 18. XII. 95. — Gente grande. 2—3 Fad. 25. XII. 95. Ebbestrand. 27. XII. 95. — Rio Seco. 10—12 Fad. 24. 1. 96. Bahia Inutil. 10—20 Fad. 23. 1. 96. — Picton Island. 23 Fad. 5. II. 96. — Lennox Cove. 10—20 Fad. 5. II. 96. — Isla nueva. 8 Fad. 30 Fad. 7. II. 96. — Lagatoaia. 10 Fad. 10. II. 96. — Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96. — Fortescue Bai. 10—12 Fad. 25. III. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Isthmus Bay, Ebbestrand. 29. III. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96. — Borja Bay. 10 Fad. 7. IV. 96. — Porvenir. 7—10 Fad. 25. II. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96. — Hope Harbour. 6—10 Fad. 30. IV. 96. — Navarino. 10 Fad. 13. V. 96. — Puerto Laguna, Ebbestrand. 15. V. 96. — Puerto Espinal, Ebbestrand. 18. V. 96. — Katanashuaia. 10—12 Fad. 28. V. 96.

Nereis eugeniae Kbg.

Fundorte: Possession Bay. Ebbestrand. 19. XI. 95. — Punta Arenas. Ebbestrand. 2. XII. 95. — Gente grande. Steiniger Ebbestrand. 26. XII. 95. — Bahia Inutil. 20—30 Fad. 23. 1. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96 (forma epitoca). — Segundo Ushuaia. Ebbestrand. 16. V. 96.

Nereis pelagica L. var. lunulata.

Linné Syst. naturae X. T. 17. pg. 654. Ehlers Borstenwürmer pg. 511.

Fundort: Puerto Churruca, Ebbestrand. 26. III. 96.

Lycastis quadraticeps Gay.

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestrand. 1. und 6. XII. 95. —

Puerto Novo, Ebbestrand. 8. II. 96. — Puerto Espinal, Ebbestrand. 18. V. 96.

Eunicidae.

Eunice antennata Sav. var.

Savigny Système des Annélides. 1820. pg. 50.
Fundort: Puerto Madryn. 5 Fad. 8. XI. 95. Sandboden, Ebbestrand. 9. XI. 95.

Nematonereis oculata Ehl.?

Ehlers Borstenwürmer. 1868. pg. 374.
Fundort: Puerto Madryn. 2—5 Fad. 9. XI. 95.

Lumbriconereis tetraura (Schm.).

Notocirrus tetraurus Schmarda Neue wirbell. Thiere. I. II. 1861. pg. 117.
Fundort: Puerto Eugeniae. 10—15 Fad. 12. II. 96.

Lumbriconereis magalhaensi Kbg.

Fundort: Gente grande. Steiniger Ebbestrand. 26. XII. 95. — Puerto Eugeniae. 10—15 Fad. 12. II. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96.

Lumbriconereis cingulata Ehl.

Fundort: Puerto Madryn. Sandboden Ebbestrand. 9. XI. 95.

Ninoe leptognatha n. sp.

Mehr als 30 Segmente, gelblich grau, irisirend. Kopflappen spitz kegelförmig mit zwei dorsalen Längsfurchen; Buccalsegmente gleich. Ruder mit hinterer Lippe, die vom 5. bis 40. Ruder in bis zu 6 Lappen zerschlitzt ist. Einfache breitgesäumte Borsten in den ersten 35 Rudern, weiterhin daneben gedeckte Hakenborsten, neben diesen in den hinteren Rudern einzelne ganz feine und kurze Haarborsten. Rückencirren? Im Oberkiefer lange schmale Träger, schlanke Zangen, sechszähnige Zähne, Sägeplatten mit gezähnelten Rändern, die erste auch mit größerem Zahn, die 2. mit großem Flügelfortsatz; daneben eine kleine Reibplatte und eine lange bandförmige längs der Zange.

Fundorte: Romanche Bay. 11 Fad. 4. II. 96. — Puerto Eugeniae. 10—15 Fad. 12. II. 96.

Aracoda tenuis n. sp.

Nahe der Aracoda debilis Ehl., unterschieden von ihr durch den völlig glatten Rand der breit gesäumten Borsten, lange spitz dreieckige unpaare Platte neben den Trägern im Kiefer und gezähnelte Ränder des 3. und 4. Kieferpaares.

Glyceridae.

Glycera capitata Örd.

Fundorte: Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Tribune Bank. — Hope Harbour. 6—10 Fad. 30. IV. 96. — Navarino. 10 Fad. 13. V. 96.

Glycera americana Leidy.

Syn. Glycera longissima Arvids. Glycera chiliensis Arvids.
Fundort: Puerto Madryn. 5 Fad.

Hemipodia patagonica Kbg.

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestrand. 6. XII. 95. — Martha Bank. 100 Fad. 16. III. 96. — Puerto Harris, Ebbestrand. 11. III. 96.

Goniadidae.

Goniada (Epicaste) armata Kbg.

Fundorte: Voilier Cove. 10 Fad. 3. II. 96. — Romanche Bay. 11 Fad. 4. II. 96. — Ultima Esperanza. 4—5 Fad. 2. IV. 96. — Ushuaia. 10 Fad. 7. V. 96. — Lagatoaia. 10 Fad. 10. II.

Goniada eximia n. sp.

168 Körpersegmente, 115mm lang; vordere und hintere Körperstrecke deutlich gesondert. Kopflappen kegelförmig, bestehend aus einem größeren, basalen Gliede mit Nackenorganen und 7 terminalen mit je zwei seitlichen Grübchen. Ruder der vorderen 57—60 Segmente einästig, die folgenden zweiästig; vordere Ruder mit dreilippigem Ruderast und zahlreichen zusammengesetzten Borsten mit langen spitzen Endgliedern; Rückencirren schief lanzettförmig auf großem Grundglied, Bauchcirren stumpf lanzettförmig. Hintere Ruder mit oberem einlippigen Ast und einfachen Borsten, unterer Ast dem der vorderen ähnlich. Rüssel keulenförmig, mit kleinen schuppenförmigen Papillen, am jungen Thiere jederseits in

der basalen Hälfte mit 4 winkligen Paragnathen, die dem erwachsenen fehlen; am Eingang 18 weiche Papillen, 2 drei- bis vierzähnige Makrognathen und bis zu 50 (18 + 22) zweispitzige Mikrognathen im Kreise.

Fundorte: Sta Cruz, Ebbestrand. Tribune Bank, Sand und Geröll. 25 Faden.

Spionidae.

Polydora (Boccardia) polybranchia Hassw.

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestrand. 1. XII. 95. — Puerto novo, Ebbestrand. 8. II. 96. — Puerto Condor.

Ariciidae.

Aricia michaelseni Ehl.

Fundorte: Voilier Cove. 10 Fad. 3. II. 96. — Puerto toro. 20—25 Fad. 11. II. 96. — Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96.

Aricia cochleata n. sp.

Mehr als 110 Segmente und über 32mm lang; Kopflappen kegelförmig, kaum vom Buccalsegment getrennt, Mundeingang einfach. Vordere Körperstrecke besteht aus 29 Segmenten; ohne Papillen; 1. Kieme am 6. Segment. Dorsaler Ast der vorderen Ruder niedrig mit schlanker, fadenförmiger Lippe und haarförmigen, feilkerbigen Borsten; unterer Ast ohne Lippe mit vierreihiger Bürste von dicken, stumpfen, vor dem Ende auf einer Fläche ausgehöhlten Borsten. Hintere Ruder mit dorsal gerücktem, niedrigem, einlippigem Ruderaste und langem Borstenbündel; unterer Ruderast kegelförmig, zweilippig, mit wenigen glatten und feilkerbigen Borsten; Bauchcirren schlank kegelförmig.

Fundort: Tribune Bank. 25 Faden. Sand und Geröll. 19. II.

Aricia ohlini n. sp.

Mehr als 46 Segmente und über 17mm lang. Koflappen kegelförmig, aus basaler und terminaler Strecke gebildet, deutlich vom kürzeren Buccalsegment getrennt. Vordere Körperstrecke besteht aus 20 papillenlosen Segmenten; erste Kieme am 6. rudertragenden Segment. Dorsaler Ast der vorderen Ruder niedriger Höcker mit einer in der Basis spindelförmigen Lippe und einem Bündel feiner, feilkerbiger Borsten; ventraler Ast mit niederem hinteren Lippensaume, einer Bürste von dicken stumpfen, am Ende abgeplatteten

und seicht eingedrückten Borsten auf drei bis vier Reihen, die eine eingerollte Spirale bilden. Hintere Ruder dorsal gerückt, beide Aeste auf gemeinsamer Basis; oberer Ast dem der vorderen entsprechend mit zahlreicheren Borsten, unterer Ast mit zwei ungleichen Lippen, wenigen feilkerbigen Borsten und ein oder zwei an der Spitze gekrümmten Stütznadeln. Bauchcirrus kurz kegelförmig.

Fundort: Tribune Bank. 25 Fad. Sand und Geröll. 19. II.

Scoloplos kerguelensis Mc Jnt.
(Scoloplos armiger Müll.?)

Fundorte: Lagatoaia. 10 Fad. 10. II. 96. — Ultima Esperanza. 4—5 Fad. 2. IV. 96.

Opheliidae.

Travisia kerguelensis Mc Jnt.

Fundorte: Puerto toro. 20—25 Fad. 11. II. 96. — Tribune Bank.

Travisia olens Ehl.

Fundort: Isla nueva navarino. 30 Fad. 7. II. 96.

Ammotrypane aulopyge Ehl.

Fundorte: Voilier Cove. 10 Fad. 3. II. 96. — Ultima Esperanza. 4—5 Fad. 2. IV. 96.

Ammotrypane scaphigera n. sp.

Durchscheinend, 21^{mm} lang, 39 Paar von Borstenbündeln, Ventralfläche platt, nach hinten vertieft. Kopflappen kegelförmig mit abgesetzter terminaler Palpode. Ruder mit einem dorsalen und ventralen, neben je einer Lippe austretendem Bündel einfacher, capillarer Borsten; Kiemen lanzettförmig, fehlen dem ersten und den sechs hinteren Rudern. Zwei Pygidialkiemen und großer concaver, an den Rändern mit Papillen besetzter Pygidialanhang.

Fundort: Lagatoaia. 10 Fad. Thon mit wenig Algen. 10. II.

Telethusae.

Arenicola assimilis Ehl.

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestrand. 2. XII. 95. — Ushuaia, Ebbestrand. 5. V. 96.

Chloraemidae.

Flabelligera induta Ehl.

Fundorte: Harberton Harbour. 6 Fad. 11. V. 96. — Navarino. 10 Fad. 13. V. 96.

Trophonia kerguelarum Gr.

Fundort: Tribune Bank.

Scalibregmidae.

Scalibregma inflatum Rthk. var.

H. Rathke, Nova Acta Acad. C. L. Curios. nat. XX. 1. 1893. pg. 184.

Fundort: Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96. — Ultima Esperanza. 4—5 Fad. 2. IV. 96.

Chaetopteridae.

Chaetopterus variopedatus Ren.

Fundorte: Rio Seco. 10—20 Fad. 24. 1. 96. — Ushuaia. 12—15 Fad. 14. II. 96. — Puerto Churruca. 20 Fad. 26. III. 96. — Borja Bai. 10 Fad. 7. IV. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96. — Puerto Condor. — Puerto Madryn, Ebbestrand. 23. VII. 96.

Cirratulidae.

Audouinia filigera d. Ch.

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestrand. 3. XII. 95. — Puerto Toro. 20—25 Fad. 11. II. 96. — Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96. — Puerto Harberton. 10—20 Fad. 14. II. 96. — Navarino. 10 Fad. 13. V. 96.

Timarete nasuta Ehl.

Fundorte: Punta Arenas. 7—8 Fad. 4. XII. 95. — Harberton Harbour. 6 Fad. 11. V. 96.

Promenia jucunda Kbg.

Fundorte: Isla nueva. 8 Fad. 7. II. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96.

Maldanidae.

Praxilla kerguelensis McJnt.

Fundort: Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96.

? Praxilla assimilis McJnt.

Fundort: Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96.

Hermellidae.

Pallasia sexungula Ehl.

Fundort: Admirality Sound. 20 Fad. 7. III. 96. — Puerto Condor.

Amphictenidae.

Pectinaria belgica Pallas.

Pallas Miscell. Zool. 1766. pg. 122. — Malmgren Nord. Hafs Annulat. Öfvers. K. Vet. Akad. Förhandl. 1865. pg. 356.

Fundorte: Ultima Esperanza. 6—7 Fad. 4. IV. 96. — Puerto Harberton. 10—20 Fad. 14. II. 96.

Ampharetidae.

Ampharete patagonica Kbg.

Fundorte: Puerto Eugenia. 10—15 Fad. 12. II. 96. — Ultima Esperanza. 4—5 Fad. 2. IV. 96. — Tribune Bank. 25 Fad. 19. II. 96.

Terebellidae.

Amphitrite variabilis (Risso).

Risso Hist. nat. d. princ. product. de l'Europe merid. T. IV. pg. 408. — v. Marenzeller Zur Kenntnis d. adriat. Anneliden. Sitzber. K. Akad. d. Wiss. Abth. I. Bd. LXXXIX. 1884. pg. 172.

Fundort: Puerto Condor. 1896.

Polymnia sp.?

Die Artbestimmung bei dem schlechten Erhaltungszustande des Thieres unausführbar.

Fundort: Puerto Madryn, Ebbestrand. 7. XI. 95.

Nicolea agassizi Kbg.

Fundorte: Puerto Madryn. 5 Fad. 8. XI. 95. Sandboden. — Ebbestrand. 9. XI. 95. — Lennox Island. 10—25 Fad. 7. II. 96. — Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 1896. — Puerto Gallegos, Ebbestrand. 16. XI. 95. — Admirality Sound. 20 Fad. 7. III. 96.

Leaena antarctica McJnt.

Fundorte: Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96. — Katanashuaia. 10—12 Fad. 28. V. 96.

Thelepus spectabilis (Verr.).

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestand. 2. XII. 95. — Gente grande, Steiniger Ebbestrand. 26. XII. 95. — Puerto toro. 20—25 Fad. 11. II. 96. — Martha Bank. 100 Fad. 16. III. 96. — Ultima Esperanza. 4—11 Fad. 5. IV. 96. — Puerto Harris, Ebbestrand. 11. III. 96. — Navarino. 10 Fad. 13. V. 96. — Puerto Espinal, Steiniger Ebbestrand. 18. V. 96.

Thelepus triserialis (Gr.)

Grube Beschreibung. Archiv f. Naturgesch. Jahrg. 21. pg. 118. 1855. v. Marenzeller Zur Kenntnis der adriatischen Anneliden. Sitzgsber. K. Akad. d. Wiss. Abth. I. Bd. LXXXIX. 1884. pg. 208.

Fundort: Ushuaia, Ebbestrand. 22. V. 96.

Artacama proboscidea Mlmgn.

Malmgren Nordiska Hafs. Annulater. Öfvers. K. Vet. Akad. Forh. 1865. pg. 394.

Fundorte: Lagatoaia. 10 Fad. 10. II. 96. — Puerto Harberton. 10—20 Fad. 14. II. 96.

Pista cristata (Müll.).

O. F. Müller Zool. Dan. Prodrom. 1776. n. 2620. Malmgren Nordiska Hafs-Annulater. Öfvers. K. Vet. Akad. Forh. 1865. pg. 382.

Fundort: Puerto Madryn, Ebbestrand. 7. XI. 95.

Terebellides strömi S.

Fundort: Katanashuaia. 10—12 Fad. 28. V. 96.

Trichobranchus glacialis Mlmgn.

Malmgren Nordiska Hafs-Annulater. Öfvers. K. Vet. Akad. Förh. 1865. pg. 395.

Fundorte: Puerto toro, Ebbestrand. 8. II. 96. — Ultima Esperanza. 7—10 Fad. 5. IV. 96.

Polycirrus sp.?

Das einzige Stück war so unvollständig, daß nur die Feststellung der Gattung möglich war.

Fundort: Katanashuaia. 10—12 Fad. 28. V. 96.

Sabellidae.

Sabella sp.?

Die Artbestimmung war bei der schlechten Erhaltung des einzigen Exemplares unausführbar.

Fundort: Puerto Condor. 54⁰—57⁰8. 52 Fad. 26. II.

Laonome antarctica Kbg.

Fundorte: Punta Arenas. 5. XII. 95. — Romanche Bai. 11 Fad. 4. II. 96. — Isla Nueva. 8 Fad. 7. II. 96.

Serpulidae.

Serpula vermicularis L.

Linné, Syst. Nat. XII. 1767. pg. 1266.

Fundorte: Puerto Harris. 15 Fad. 11. III. 96. — Puerto Condor. — Cap Valentyn. 150 Fad. 12. III. 1896.

Vermilia nigropileata n. sp.

Fadenförmig, farblos mit Ausnahme der braunvioletten Deckelspitze, 13,5^{mm} lang, 7 thoracale Segmente, Abdomen mit 24 nach hinten zusammenrückenden Borstenwülsten. Kieme mit 7 Kiemenstrahlen mit bis zu 15 Paaren von Kiemenfäden und einem nackten Deckelträger, Deckel dick spindelförmig, im Inneren mit einem kalkfreien kellenförmigen Deckelkörper. Kragen aus zwei einfachen getrennten Lappen, keine Thoracalmembran. 7 Paar dorsaler Bündel gesäumter Haarborsten, deren erstes kleiner als die 6 folgenden, unter denen je ein Wulst mit über 60 dünnen, gesägten Platten. Das lange Abdomen in der Vorderstrecke borstenlos, weiterhin kurze Wülste mit wenigen (15) wie die thoracalen gestaltete Platten und kurzen breit gesäumten Borsten, an den letzten Wülsten je eine einfache, weit vorragende Borste. Röhre weiß kalkig, ganz aufliegend, unregelmäßig gewunden, mit einfacher dorsaler First.

Fundort: Puerto Harris. 15 Fad., auf Steinen. 11. III. 96.

Placostegus sp.?

Leere Röhren, die vermuthlich auf Thiere dieser Gattung zu beziehen sind.

Fundort: Cap Valentyn. 150 Fad. 12. III. 96.

Spirorbis nordenskjöldi n. sp.

Nahe verwandt mit Spirorbis borealis Daud. und Spirorbis mediterraneus Caull und Fel. Mesn. Nur 7 Kiemenstrahlen, der

Deckelstiel am Ende schwach flügelförmig erweitert; der Deckelkörper wie bei Sp. borealis Daud.; sein Rand hier und da wie eingekerbt. An den thoracalen Borsten des ersten Segmentes ist die Strecke zwischen der flügelförmigen Erweiterung und der Endspitze noch länger als bei Spirorbis mediterraneus; die feilkerbigen Borsten des 3. Segmentes wie bei dieser Art. Die borstenlose Strecke des Abdomen sehr lang, dahinter 8—9 Borstenwülste.

Röhren weiß kalkig, links gewunden, Vorderstrecke aufgerollt und aufwärts gerichtet oder um eine fadenförmige Unterlage (Alge) gedreht, die Oberfläche glatt.

Fundort: Punta Delgada. 5 Fad. 18. II. 96.

Spirorbis perrieri Caull et Fel. Mesn.

M. Caullery et F. Mesnil Études sur la morphologie comparée . . . chez les Spirorbes. Bull. scientif. de la France et de la Belgique. T. XXX. 1897. pg. 208.

Fundorte: Punta Arenas, Ebbestrand. 1. XII. 95. — Puerto Churruca. 20 Fad., auf Laminarien. 26. III. 96. — Porvenir 1896. — Beagle Channel zwischen Navarino und Ewslandet, auf Laminarien. 9. V. 96.

Spirorbis Lebruni Caull. et Fel. Mesn.

M. Caullery et F. Mesnil Études sur la morphologie comparée . . . chez les Spirorbes. Bull. scientif. de la France et de la Belgique. T. XXX. 1897. pg. 206.

Fundort: Puerto toro. 20—25 Fad. 11. II. 96.

Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen.

Siebenter Bericht.

Von

J. Orth.

Vorgelegt in der Sitzung am 30. Juni 1900.

In der 6. Auflage meiner Pathologisch-anatomischen Diagnostik, welche im Anfang dieses Sommersemesters erschienen ist, wird man eine Anzahl neuer Angaben finden, auf welche sich ein Theil der Arbeiten bezieht, über die hier berichtet werden soll.

1. Dahin gehören die Angaben über das Eindringen von Zellen, sowohl leukocytären wie fibroblastischen Wanderzellen, in den Gelenk- und Epiphysenknorpel bei entzündlichen und tuberkulösen Erkrankungen der Knochen und Gelenke (S. 674, 681, 682). Durch die in meinem 5. Bericht 1898 angeführte Beobachtung von dem Eindringen eines längs der Knorpeloberfläche in einem aufliegenden Blutgerinnsel sich ausbreitenden Granulationsgewebes in den Knorpel wurde meine Aufmerksamkeit von neuem der Frage zugewandt, in wie weit die Zerstörung des Gelenk- und Epiphysenknorpels, wie wir sie bei Osteomyelitis und Arthritis septica sowohl wie bei Tuberkulose der Knochen und Gelenke kennen, durch aktive Betheiligung der Knorpelzellen, in wie weit sie durch Wanderzellen bedingt werde und welcher Art etwa diese Wanderzellen seien.

In der Litteratur wird entweder nur von Wucherung der Knorpelzellen und dadurch bedingter Erweiterung der Höhlen berichtet, oder es wird eine continuirliche Zerstörung des Knorpelgewebes mit Einwachsen von Granulationsgewebe in die eröffneten Knorpelhöhlen beschrieben; nur andeutungsweise ist bei einzelnen

Schriftstellern von einem Eindringen isolirter Zellen in die uneröffneten Knorpelhöhlen die Rede, eine genauere Schilderung dieses Eindringens habe ich nirgendwo gefunden.

Ich untersuchte daher, so oft sich Gelegenheit dazu bot, die Gelenk- und Epiphysenknorpel in Rücksicht auf diese Frage und konnte bald keinen Zweifel mehr darüber haben, daß sowohl ein Einwandern von leukocytären und fibroblastischen Zellen in die Grundsubstanz des Knorpels wie ein Eindringen solcher Zellen in geschlossene Knorpelhöhlen vorkommt, in welchen man die eingedrungenen Zellen ganz deutlich von den Knorpelzellen unterscheiden kann.

Den zweiten Assistenten des Institutes, Herrn Dr. Heile, habe ich dann veranlaßt, die Untersuchungen weiter zu führen und besonders auch auf Karyomitosen in den verschiedenen Zellen zu achten, sowie an Reihenschnitten festzustellen, daß das Auftreten von fremden Zellen in geschlossenen Knorpelhöhlen nicht etwa ein auf einer schrägen Schnittführung beruhendes scheinbares ist, sondern daß thatsächlich in völlig geschlossenen Höhlen diese Einlagerungen nachweisbar sind. Dieser Nachweis konnte denn auch zweifelfrei erbracht werden, und zwar wurden sowohl polynucleäre Exsudatzellen (Eiterkörperchen), als auch einkernige Rundzellen und spindelförmige Fibroblasten in der Ein- oder Mehrzahl gefunden, die ersten hauptsächlich bei acuten eiterigen Erkrankungen, die anderen bei chronisch-eiterigen und tuberculösen Vorgängen. Die Knorpelzellen, welche besonders durch ihre anders aussehenden Kerne von den Eindringlingen gut zu unterscheiden sind, zeigen sich auch manchmal vermehrt, doch ist es nie gelungen eine Mitose an ihnen aufzufinden, während das bei den Granulationszellen auch innerhalb des Knorpels wiederholt möglich war. Häufig zeigten dagegen die Knorpelzellen unzweifelhaft degenerative Veränderungen, Verfettung, Kernschwund, Necrose, und auch ihre anscheinend auf amitotischer Theilung beruhende Vermehrung dürfte wohl mehr eine atrophische als eine eigentliche progressive Veränderung vorstellen.

Abgesehen von der Verschiedenheit der Zellen in diesen Knorpelhöhlen spricht für die Einwanderung von Zellen der Befund von gleichen zelligen Elementen in der Knorpelgrundsubstanz sowie der fernere Umstand, daß ihre Zahl stets in der Nähe des anstoßenden Gewebes am dichtesten ist und nach dem Inneren des Knorpels hin abnimmt. Sehr merkwürdig ist das Bild der Kerne der leukocytären Wanderzellen -- ihren Leib sieht man in den gefärbten Balsampräparaten in der Regel ebensowenig wie das bei

Deckglastrockenpräparaten von Eiter der Fall zu sein pflegt —, indem dieselben langgestreckt und eigenthümlich mißstaltet (flaschenförmig, keulenförmig u. s. w.) erscheinen, so wie es längst von dem Aussehen der Wanderzellkerne in der entzündeten Hornhaut bekannt ist.

Die Knorpelgrundsubstanz ist im Bereich der Einwanderung nicht mehr normal, wie man aus einer immer deutlicher hervortretenden Streifung und ihrem abweichenden Verhalten gegenüber den verschiedensten Farbstoffen entnehmen kann.

Neben diesen discontinuirlichen Veränderungen fehlen selbstverständlich die bekannten Zerstörungslacunen nicht, welche häufig unzweifelhaft eröffneten Knorpelhöhlen entsprechen, aber doch auch unabhängig von solchen entstehen können, derart, daß einzelne Knorpelkapseln mit ihrem Inhalt völlig abgetrennt und sogar mitten im Granulationsgewebe liegend gefunden werden können.

Ich komme also zu dem Schlusse, daß die Zerstörung des Knorpels bei eiterigen und tuberkulösen Erkrankungen weniger (vielleicht gar nicht) durch Wucherung der Knorpelzellen als vielmehr durch eindringende Eiter- und Granulationszellen bewirkt wird, und daß diese Zellen nicht nur continuirlich, vom Rande her, sondern auch discontinuirlich durch Einwandern in den Knorpel und Eindringen in dessen Höhlen die Zerstörung bewirken, wobei durch eine vorgängige Veränderung der Grundsubstanz dem Eindringen wie der Zerstörung vorgearbeitet wird.

2. Es waren mir schon längst Zweifel darüber entstanden, ob die gemeinhin als verkalkte Glomeruli bezeichneten punktförmigen Kalkablagerungen, welche man so häufig bei älteren Leuten mit oder ohne Schrumpfung der Nieren vorfindet, wirklich alle auf Malpighi'sche Körperchen (Nierenkörperchen) zu beziehen seien. Als ich dann begann der Frage Aufmerksamkeit zu schenken, stellte sich bald heraus, daß die Mehrzahl der Kalkkörperchen mit den Knäueln, viele auch überhaupt mit den Nierenkörperchen nichts zu thun haben, daß es sich vielmehr um verkalkten hyalinen Inhalt kleiner kugeliger Hohlräume handelt.

Ich beauftragte daher Herrn Dr. Baum, Volontärassistent am Institut, eine systematische Untersuchung über die Bedeutung der punktförmigen Kalkkörperchen der Nierenrinde anzustellen. Derselbe konnte feststellen, daß es zwar eine Verkalkung einzelner hyalin gewordener Schlingen von Knäueln, daß es auch gelegentlich eine Verkalkung von im Ganzen hyalinatrophisch gewordenen Knäueln gibt, daß die Kalkkörperchen aber der Mehrzahl nach kalkhaltige Cystchen sind, die bald deutlich

als von Harnkanälchen stammend erkennbar sind, bald von Nierenkörperchen herrühren, deren Knäuel weder comprimirt noch atrophisch sind, aber entweder gänzlich fehlen oder nur aus wenigen, aber durchgängigen und regelmäßig gebildeten Schlingen bestehen. Da nun das umgebende Gewebe außer einem reichen Capillarnetz keinerlei Besonderheiten darbot, so kommt B. zu dem Schluß, daß es sich dabei um eine Entwicklungsstörung der Nierenkörperchen handeln müsse, über die er allerdings noch nichts Bestimmtes festzustellen vermochte, für deren Annahme aber die neuen Untersuchungen von Ribbert über die Entwickelung der Niere gute Anhaltspunkte gewähren.

3. Die bei der Mehrzahl der Menschen, hauptsächlich im Alter, aber auch schon in jüngeren Jahren an dem großen Mitralsegel zu findenden gelblich-weißen Flecken sind seither stets als auf Verfettung von Bindegewebszellen beruhend in der Litteratur aufgeführt worden. Es war mir nun bei der Untersuchung zwecks Demonstration in meinen Cursen wiederholt aufgefallen, daß zwar eine Verfettung nach der seitherigen Annahme vorkommt, daß aber in den meisten Flecken zugleich eine Veränderung der Intercellularsubstanz vorhanden ist, welche bei der frischen Untersuchung eine körnige Beschaffenheit zeigt, welche zweifellos wesentlich zu der Undurchsichtigkeit der Flecken mit beiträgt.

Um Genaueres über die Flecken zu erfahren, habe ich den Volontärassistenten am Institut, Herrn Dr. Beitzke veranlaßt, eine möglichst große Anzahl von gefleckten Segeln nach verschiedenen Methoden zu untersuchen. Es hat sich dabei zunächst bestätigt, daß die Verfettung von Zellen im allgemeinen eine mehr untergeordnete Rolle spielt, daß die Hauptsache eine Degeneration der leimgebenden Bindegewebsfasern ist, welche, abgesehen von der schon erwähnten auf Kalkablagerung beruhenden Körnung, sich gegen Farbstoffe anders als normale verhalten und zwischen denen eine Kernfärbung nicht mehr eintritt, während in ihrer Umgebung oft deutlich eine Vermehrung der Kerne nachzuweisen ist. Entsprechend der schon makroskopisch erkennbaren Lage der Flecken an der Kammerseite des Klappensegels sitzt diese Veränderung in der Kammerhälfte des Segelquerschnittes und zwar in der mittleren Schicht, dicht unterhalb der breiten elastischen Lamelle, während die Verfettung der Zellen sowohl in der mittleren wie innerhalb der elastischen Schicht der Kammerseite gefunden wird. Herr Beitzke hat in einzelnen Fällen noch weitere Veränderungen dieser elastischen Schicht beobachtet, wegen deren auf dessen zu erwartende aus-

führliche Veröffentlichung verwiesen wird, ebenso wie wegen der Localisation der Flecken im einzelnen, deren Berücksichtigung noch weitere Gründe für die Annahme liefert, daß es sich bei diesen Veränderungen um die Folgen mechanischer Verhältnisse handelt, wie schon aus dem Sitz an der Kammerseite des Segels, d. h. an derjenigen Seite, welche bei dem Schluß der Klappe den Anprall des Blutes an erster Stelle auszuhalten hat, zu erschließen war.

4. Die in meinem vorigen Bericht am Schlusse von No. 1 erwähnten, im Greifswalder pathologischen Institut von Grohé angestellten Experimente über die Erhaltung der Knochenbildungsfähigkeit an mehrere Tage lang conservirten Beinhautlappen erschienen mir so wichtig, daß ich Herrn Volontärassistent Dr. Nolte beauftragte, dieselben nachzumachen. Besonders in Rücksicht auf meine Ausführungen in dem genannten Bericht will ich nicht unterlassen, hier mitzutheilen, daß die Nachuntersuchung im Wesentlichen eine Bestätigung der Angaben Grohés geliefert hat, insofern es einige mal gelungen ist, durch intermuskuläre Einpflanzung von Kaninchen-Beinhaut, welche bis zu 50 Stunden nach der Entnahme aufbewahrt worden war, eine Wucherung der Osteoblastenschicht bzw. eine Knorpel- und Knochenbildung hervorzurufen und zwar bei ganz fremden Kaninchen, also unter verhältnißmäßig ungünstigen Umständen. Es ist also damit von neuem festgestellt worden, daß im Anschluß an eine Ueberpflanzung von überlebender Beinhaut eine Knorpel-Knochenbildung an Orten entstehen kann, wo solche Gewebe sonst nicht vorhanden sind, und man wird von vornherein diese Neubildung von den überpflanzten Beinhautzellen abzuleiten geneigt sein. Da indessen auch unter allerhand sonstigen abnormen Verhältnissen unabhängig von Osteoblasten aus Bindegewebe Knorpel und Knochen entstehen kann, so wird eine besonders sorgfältige Beurtheilung der Befunde in der Richtung nothwendig sein, ob nicht die Ueberpflanzung der Beinhaut blos solche abnorme Verhältnisse geschaffen hat und wie weit etwa die neugebildeten Gewebe unter Mitwirkung der örtlichen Bindegewebszellen entstanden sind. Die ganze Entwicklung der Neubildungen, ihre engen Beziehungen zu der auch später noch nachweisbaren elastischen Schicht der Beinhaut läßt kaum einen Zweifel über ihre Entstehung aus der überpflanzten Beinhaut, obwohl es in unseren Präparaten nicht gelang, sichere Mitosen an den Periostzellen aufzufinden.

Wenn man sich auch sehr hüten muß, aus derartigen Beobachtungen weitgehende allgemeine Schlüsse zu ziehen, wenn ich auch heute noch der Meinung bin, daß an der Beurtheilung der

früheren Entzündungsexperimente durch die neu gewonnenen Thatsachen nichts geändert wird, so sind diese Thatsachen doch interessant und wichtig genug, um es nothwendig erscheinen zu lassen, daß möglichst zahlreiche Untersucher der von Grawitz ausgegangenen Anregung folgend immer neue Experimente mit veränderter Anordnung über die Ueberlebens- und Erholungsfähigkeit der verschiedenen Gewebszellen des Körpers anstellen.

5. Herr Dr. Nolte hat noch eine andere Reihe von Untersuchungen ausgeführt, welche ausgingen von der an Präparaten des Demonstrationscurses gemachten Beobachtung von regeneratorischer Neubildung Lieberkühn'scher Krypten (ohne Muscularis mucosae) an einem geheilten tuberkulösen Geschwür, sowie von Wucherung solcher Krypten in bezw. an Stelle von zerstörten Lymphknötchen des Dickdarms bei chronischer Dysenterie. Derartige Wucherungen sind nicht unbekannt, aber in der deutschen Litteratur ist nur wenig und viel weniger als in der ausländischen, besonders der französischen, darüber zu finden, so daß ich es für nicht überflüssig hielt, eine besondere Arbeit darüber ausführen zu lassen.

Ich machte dabei zufällig die Beobachtung, daß an einem ganz normal aussehenden Lymphknötchen des Dickdarms nicht nur Krypten in die lymphadenoide Substanz eingebettet lagen, sondern daß sie auch größer waren und tiefer in die Darmwand hineinragten als die in der Nachbarschaft des Knötchens gelegenen, nach der Tiefe durch die Muscularis mucosae abgegränzten Krypten, so wie ähnliches schon von Katzen und besonders von Meerschweinchen angegeben worden ist (Stöhr, Retterer u. a.).

Meiner Anregung folgend untersuchte Herr Nolte gesunde und kranke Därme von nach Alter, Geschlecht, Krankheit verschiedenen Menschen und kam zu dem Resultat, daß derartige Beziehungen von Krypten zu Lymphknötchen zwar in erkrankten Därmen besonders deutlich gefunden wurden (außer bei Dysenterie bei Colitis cystica), daß sie in gewissem, in einzelnen Fällen wechselndem Grade aber ganz regelmäßig und unabhängig von besonderen Erkrankungen des Darms wie von Alter, Geschlecht und Krankheit der Menschen am Dickdarm vorkommen. Ueber die Verhältnisse im Dünndarm werden die Untersuchungen noch fortgesetzt.

6. In meinem Lehrbuch der speziellen pathologischen Anatomie (I, S. 958) habe ich dem Gedanken Ausdruck gegeben, ob nicht bei der multiplen Leberadenombildung eine vicariirende Hypertrophie über das Ziel hinausgehe und durch atypisches Wachsthum

zur Geschwulstbildung führe, die bis zur Krebsbildung gehen kann, wobei ich schon durchblicken ließ, daß ich in den mit Cirrhose verbundenen Fällen, diese für das erste, die Adenombildung für das zweite hielte. Der Volontärassistent Herr Dr. Schmieden hat nun aus seiner sorgfältigen Untersuchung eines im Institut zur Beobachtung gelangten neuen Falles, Lebercirrhose und multiple Adenombildung der Leber, Virch. Arch. 159, den Schluß gezogen, daß an eine primäre Lebercirrhose sich eine vicariirende Hypertrophie mit typischen Befunden angeschlossen habe, aus der dann an zahlreichen Stellen eine Adenombildung hervorgegangen sei, die wenigstens hie und da bereits einen krebsigen Charakter (Einbrechen in das Bindegewebe) angenommen habe. In dem cirrhotischen Bindegewebe ließen sich sehr große Mengen elastischer Fasern nachweisen sowie die bekannten Gallenkanälchen, an denen keinerlei Sprossung, kaum je eine Mitose aufzufinden war, so daß angenommen werden muß, daß dieselben nicht auf neoblastischem, sondern auf metablastischem Wege (aus Leberzellenreihen) entstanden sind. Das ist nicht nur von Interesse gegenüber den Wucherungserscheinungen an den Leberzellen derselben Leber, sondern auch in Rücksicht auf andere Fälle, bei denen gleichzeitig eine reparatorische Wucherung von Leberzellen und von Gallengängen vorhanden war, nämlich in

7. Lebern mit traumatischer Ruptur.

Durch die Güte des Herrn Privatdocenten Dr. Beneke war dem Institut die Leber eines 35jähr. Mannes zugegangen, welcher 10 Tage nach einem Sturz mit dem Fahrstuhl unter den Erscheinungen einer inneren Blutung gestorben war. Die Leber zeigte einen großen Riß, in dessen Tiefe schon mit bloßem Auge eine eröffnete Pfortader und Leberarterie zu sehen waren. Nach der Kapsel zu schlossen sich ausgedehnte infarctartige Necrosen des Lebergewebes an, welches ein trübes gelbweißes Aussehen darbot, wie es von den embolischen Infarcten der Niere bekannt ist. Die Gestalt der necrotischen Partie auf senkrechtem Durchschnitt war keilförmig, die Keilspitze nach innen gerichtet; auch ein dunkelrother Hof fehlte nicht. Die von Herrn Dr. Heile, 2. Assistent des Institutes vorgenommene genaue mikroskopische Untersuchung bestätigte nicht nur die gestellte Diagnose, anämisch-necrotische Infarkte, sondern enthüllte auch eine Anzahl interessanter Besonderheiten.

So wurden auf mehreren Schnitten die beiden zerrissenen Gefäße gesehen, so zeigte sich in deren Umgebung am Rande des erhaltenen Lebergewebes eine Organisation des Blutgerinnsels (mit

reichlicher Riesenzellenbildung) ganz wie bei der Organisation eines Venenthrombus. An den necrotischen Abschnitten war vielfach am Rande ein, wenn auch ungleich breiter und ungleich ausgeprägter, zelliger Saum zu sehen, gebildet von Leukocyten, welche hauptsächlich innerhalb von Gefäßen, wesentlich in Capillaren, aber auch in Pfortaderästen und besonders in Centralvenen lagen, zum kleineren Theil aber sich auch außerhalb der Gefäße befanden, zwischen den necrotischen Leberzellen. Es handelte sich also um die auch von den Niereninfarkten bekannte sog. weiße Hyperämie, welche nach Guillebeau in dieser Form besonders bei Herabsetzung des Blutdrucks eintritt, wie solche auch in diesem Falle vorhanden gewesen sein muß (langsamer Verblutungstod). Mit entzündlicher Eiterung hat dieser Vorgang nichts zu thun, Mikroorganismen irgend welcher Art fehlten durchaus.

Auch der Infarct war bereits in Organisation begriffen, denn weiter nach außen von der leukocytären Randschicht fand sich überall junges gefäßhaltiges Bindegewebe, welches besonders auch die Höhlung der größeren Lebergefäße, vor allem von Centralvenen erfüllte. Grade in dieser Granulationszone fielen nun mächtige, oft höchst wunderlich gestaltete epitheliale Kanäle auf, welche ihrer Lage und ihrem Zusammenhang nach nichts anderes als in Wucherung begriffene Gallengänge sein konnten. In der That fanden sich in ihren Zellen auch viele Mitosen, daneben Riesenzellen ohne Mitosen (wohl Erzeugnisse amitotischer Kerntheilung). Die merkwürdig unregelmäßige Gestaltung der Gänge war abhängig einmal von dieser Zellwucherung und Riesenzellbildung, dann von knospenartigen Auswüchsen verschiedener Größe. Wenn auch vielfach ein unmittelbarer räumlicher Zusammenhang mit Reihen färbbarer Leberzellen vorhanden war, so konnte doch noch nirgends eine Neubildung von Leberzellenbalken aus den gewucherten Gallengängen nachgewiesen werden.

Aber nicht nur an Gallengängen, sondern auch an Leberzellen konnten Neubildungsvorgänge festgestellt werden und zwar wiederum zweierlei Art: Kernvermehrung ohne Mitosen, bis zur Riesenzellbildung fortschreitend, und mitotische Kern- und Zelltheilung. Es ist dabei beachtenswerth, daß die Erscheinungen amitotischer Kernvermehrung mehr in der Nähe der Infarcte, die Mitosen etwas entfernter gefunden wurden, ja vereinzelt sogar noch ganz weit von dem Infarct entfernt in unverändert aussehendem Lebergewebe. Dasselbe gilt auch für die Mitosen an Gallenkanälchen.

Somit ergibt diese menschliche Leber bezüglich der Regene-

ration bezw. regeneratorischen Hypertrophie von Lebergewebe durchaus den bei den Thierexperimenten gewonnenen gleichende Resultate und begründet die Berechtigung, die dort aus den Beobachtungen gezogenen Schlüsse als auch für den Menschen gültig anzusehen.

Aufmerksam gemacht durch diesen eclatanten Fall haben wir mikroskopische Sammlungs-Präparate von geborstenen Lebern durchgesehen und gefunden, daß regelmäßig solche necrotischen Abschnitte am Wundrand vorhanden sind, worüber übrigens auch schon Angaben in der Litteratur vorliegen — und daß auch die Zeichen reparatorischer Vorgänge bei nicht ganz frischen Verletzungen nicht fehlen. In einigen neuen Beobachtungen gelang es nicht nur wieder infarctartige Necrosen (ebenfalls mit Leukocytenrand) aufzufinden, sondern auch einen Eiterherd an der convexen Oberfläche der Leber (Tod 4 Wochen nach der Verletzung) als durch secundäre Sequestrierung eines necrotischen Infarctes entstanden aufzuklären.

8. Den nicht grade zahlreichen Fällen von Plattenepithelkrebsen der Gallenblase können ein paar neue hinzugefügt werden, mit deren genauerer Untersuchung sich der Volontär-Assistent Herr Dr. Deetz beschäftigt hat. Es handelt sich nicht nur um Geschwülste mit platten Zellen und Schichtungskugeln, sondern es konnten auch in einem Theil der Fälle typische Stachelzellen nachgewiesen werden. Der eine Fall war noch complicirt durch eine krebsige Stenose des Choledochus, in dessen Wand eine zweifellos adenomatöse Neubildung vorlag, während gleichzeitig Hornkrebs in sie eingewachsen war.

Die Befunde an den Krebsen gaben mir Veranlassung, von Herrn Deetz eine regelmäßige eingehende Untersuchung aller zur Beobachtung gelangenden veränderten Gallenblasen in Bezug auf das Verhalten ihres Epithels vornehmen zu lassen, in der Hoffnung, weitere Präparate mit Metaplasie des Cylinderepithels in Plattenepithel zu erhalten. In keiner der zahlreich zur Untersuchung gelangten Gallenblasen ist es Herrn Deetz gelungen, eine Stelle mit umgewandeltem Epithel aufzufinden.

9. Die Bekanntmachung einer neuen scharfen und einfachen Sonderfärbemethode für elastische Fasern durch Weigert hat eine Schaar von Arbeitern veranlaßt, das Verhalten der elastischen Fasern in erkrankten Organen oder pathologischen Neubildungen zu untersuchen. Auch im Institut wurden einschlägige Untersuchungen von Herrn Prof. Herbert U. Williams angestellt über das Vorkommen und Verhalten elastischer Fasern

in Krebsen, welcher in einer demnächst erscheinenden Festschrift für Prof. W. H. Welch in Baltimore kurz über seine Resultate berichten wird. Er fand Neubildung elastischer Fasern nur in einem Leberkrebs, einem obliterirenden Krebs des Ductus thoracicus sowie in einigen Venenkrebsen und kommt zu dem Schluß, daß meist keine elastischen Fasern im Krebsstroma vorhanden sind, sofern dieses neugebildet ist. Kommt das aber ausnahmsweise vor, dann sind die Fasern spärlich und fein. Da wo sie sich fanden, war entweder eine starke Entwicklung des Stroma vorhanden oder die neugebildeten Fasern standen in Verbindung mit vorher bestandenem elastischem Gewebe.

Eine Anzahl von Arbeiten beschäftigten sich auch in diesem Jahre wieder mit dem weiblichen Geschlechtsapparat:

10. Herr Dr. Jul. Voigt hat in seinen Beiträgen zur Tuberkulose der weiblichen Geschlechtsorgane (Arch. f. Gynäkol. 59) einige Fälle von Tuberkulose der Scheide beschrieben, besonders solche, bei welchen der ganze Genitalapparat von den Eierstöcken bis zu der Scheide tuberkulös erkrankt war. Betreffs der Scheide ergab sich, daß die Tuberkulose daselbst in 3 Formen auftreten kann: 1. als Granulationswucherung ohne typische Knötchen aber mit oberflächlichen Substanzverlusten, 2. unter Knötchenbildung mit typischer Ulceration, 3. in Form tiefgehender käsiger Zerstörung der Wand. Auch in dem ersten Falle können große Mengen von Tuberkelbacillen vorhanden sein.

Der 1. Assistent des Institutes Privatdocent Dr. Aschoff, welcher als Referent in Lubarsch und Ostertags Ergebnissen etc. die Regeneration und Hypertrophie sowie die Geschwülste bearbeitet hat, hat auch seine Studien über den weiblichen Geschlechtsapparat, welche schon in früheren Berichten Gegenstand von Mittheilungen waren, fortgesetzt.

11. Schon in der im vorigen Bericht berücksichtigten Arbeit über ein cystisches Adenofibrom der Leistengegend hat A. Befunde mitgetheilt, welche gegen die gangbare Ansicht über die Lage des Paroophoron, daß dieses nämlich medianwärts vom Eierstock, zwischen Nebeneierstock und Tubenwinkel gelegen sei, sprachen, und hat die Meinung geäußert, daß das Paroophoron im Sinne eines Analogon des Giraldes'schen Organes cranialwärts oder in gleicher Höhe mit dem Mesovarium liege und an der letzten Theilungsstelle der Arter. spermatica vor dem Hilus der Geschlechtsdrüse gesucht werden müsse. Er konnte nunmehr auf der Naturforscher-Versammlung in München (Verhandlungen d. path. Ges. II) berichten, daß er bei einem fast ausgetragenen

Kinde, bei welchem am breiten Mutterbande nahe dem freien Rande beiderseits kleine Nebennieren lagen, zwischen den Aesten der Arter. spermat. vereinzelte und gruppenförmig angeordnete Drüsen und sehr schön erhaltene Glomeruli gefunden habe (und zwar ehe die den gleichen Gegenstand behandelnde Monographie von Rob. Meyer erschienen war).

12. Auch die Untersuchungen über die Beziehungen der tubaren Placenta zum Tubenabort und zur Tubenruptur wurden fortgesetzt (Arch. f. Gynäkol. 60). Aschoff steht nicht an, nach Untersuchung von 4 neuen Fällen tubaren Abortes zu behaupten, daß die Wandzerstörung an der Placentarstelle durch die fötalen Zotten die unausbleibliche Folge jeder tubaren Eientwicklung ist. Eine Deciduabildung kann allerdings, wie die Litteratur lehrt, in der Tube eintreten, aber sie erfolgt dann spärlich, langsam, zunächst nur fleckweise, erst in späteren Monaten auch in größerem Zusammenhang, und sie fehlt auch dann stets an der Placentarstelle. Die Eröffnung mütterlicher Gefäße und die Ersetzung ihrer Wandung durch fötales Gewebe vollzieht sich an der Tube in gleicher Weise wie am Uterus, deshalb ist auch anzunehmen, daß hier in gleicher Weise die Zotten von mütterlichem Blute umspült werden, welches seitlich durch die aus Falten sowie aufgewühlten Schleimhaut- und Muskelschichten hergestellte Pseudoreflexa abgeschlossen wird. Wenn trotzdem an den Tuben durch Zerreißung der größeren, in die fötale Placenta einbezogenen Gefäße in der Regel schon frühzeitig Abort oder Ruptur entsteht, so geschieht das, weil im Gegensatz zum Uterus durch den relativ geraden und kurzen Verlauf derselben und durch ihre Einbettung in ausschließlich fötales Gewebe ihre Zerreißung begünstigt wird, deren letzte Ursache in plötzlichen Blutdrucksteigerungen durch Contractionen des an der Placentarstelle unterbrochenen, über die Convexität des Eies angespannten Muskelringes gesucht werden muß. Besonders gefährdet sind in allen Fällen die von fötalen Wucherungen mehr oder weniger durchsetzten dünnen Wandungen der Pseudoreflexa.

13. Ueber einen der sehr seltenen Fälle von allgemeiner Miliartuberkulose im Anschluß an eine Tuberkulose der Innenhaut der Aorta hat Dr. Aschoff in den Verhandlungen der deutschen pathologischen Gesellschaft (Bd. II) Mittheilung gemacht. Im Anschluß daran mag es gestattet sein, eine Bemerkung über die historische Entwicklung unserer Kenntnisse von der Arterientuberkulose zu machen, da bis in die neueste Zeit hinein ungenaue Angaben über diesen Gegenstand vorgebracht worden sind.

Wenn, um nur den letzten Autor anzuführen, Benda in einem Referat in Lubarsch und Ostertag's Ergebnissen, V, 1900, sagt, daß der tuberkulöse Prozeß der Intima „bei kleineren Arterien“ zuerst von R. Koch (1884) und Bergkammer (1885) gesehen, von D. Nasse eingehend studiert worden“ sei, so trifft das nicht ganz zu, da die ersten Mittheilungen über Intimatuberkulose auch an Arterien von mir herrühren, indem ich schon 1879 im 76. Bande von Virchow's Archiv, S. 229, von den Gefäßen in den Lungen meiner tuberkulösen Versuchskaninchen gesagt habe, daß sich Veränderungen in der Adventitia und Intima gefunden hätten. „Die letzteren gehören z. Th. offenbar in das Gebiet der sog. Endarteriitis obliterans, z. Th. aber sind sie meiner Meinung nach als tuberkulöse aufzufassen. Die Tuberkel sitzen theils in der Adventitia und sind bis in die Intima vorgedrungen, theils sind sie auf diese beschränkt und als primäre Intimatuberkel anzusehen“. In demselben Bande berichtet mein Assistent Dr. Mügge unter Berufung auf schon früher von mir gemachte Beobachtungen über Intimatuberkel der Lungenvenen und Lungenarterien beim Menschen. Was Herrn Nasse betrifft, so hat derselbe in seiner citirten, auf meine Veranlassung und unter meiner Leitung ausgeführten Arbeit ebenfalls nur ältere Beobachtungen von mir weiter ausgearbeitet und verfolgt, zum großen Theil an von mir bereits früher gesammeltem Material, und hat selbst im Eingange seiner Abhandlung auf Angaben der 3. Auflage meiner Diagnostik hingewiesen, durch welche sogar schon von den durch Arterientuberkulose bewirkten Infarkten der Niere Mittheilung gemacht wird. Diese Auflage der Diagnostik ist aber bereits 1884 erschienen, also in demselben Jahre wie die Koch'sche Mittheilung und ein Jahr früher als die Arbeit von Bergkammer.

14. In seinen histologischen Untersuchungen über die Harnsäureablagerungen (Verhdl. d. d. path. Ges. II) äußert sich Dr. Aschoff in einem 1. Theil auf Grund experimenteller Untersuchungen an Kaninchen über die Bedeutung der Uratzellen von Ebstein und Nicolaier. Er theilt nicht die Ansicht von Sauer, daß die Uratzellen aus Epithelien hervorgingen, welche infolge der durch die Uratkugeln in den Harnkanälchen bewirkten Störungen abgestorben seien und erst nachträglich mit Harnsäuresalzen imprägnirt wurden, sondern stimmt Ebstein und Nicolaier so weit zu, daß die Uratzellen Epithelzellen sind, in welche sich primär Urate abgelagert haben, aber er kann nicht zugeben, daß die Harnsäure in jedem Falle einen schädigenden Einfluß auf die Epithelzellen ausübe, in den

veränderten Epithelien zur Ausscheidung komme und durch Zerfallen der Zellen frei werde, denn er hat wie Sauer Abscheidung an die Oberfläche von unveränderten Zellen, Abscheidung im inneren Abschnitt der Zellen (und zwar sowohl in gewundenen Kanälchen wie in schleifenförmigen) bei ganz unverändert aussehendem Kern und übrigem Zellenleib gefunden. Typische Uratzellen fand er um so reichlicher je mehr Harnsäure auszuscheiden war. A. nimmt mit Sauer an, daß bei geringen Harnsäuredosen die Nieren der Kaninchen sämmtliches Material nach Art der Vögel und Reptilien an der Oberfläche von intacten Epithelzellen ausscheiden können in Form feiner Körner, die sich in den Kanälchen durch Wachsthum in Sphärolithen umbilden, daß aber, wenn die Harnsäuremenge zu groß ist, die Zellen selbst, gewissermaßen infolge von Ermüdung, imprägnirt werden. Die Harnsäure ist an und für sich kein Gift für die Nierenepithelien, aber ungeheuren Mengen gegenüber erlahmt das Vermögen der Zellen, die Harnsäure in einer festen Eiweißverbindung auszuscheiden und die Zelle selbst wird Ort der Abscheidung, wobei schließlich allerdings der Tod der Zelle eintreten kann.

Was die Verhältnisse beim Menschen betrifft, so konnte A. in einem geeigneten Falle von Harnsäureinfarct beim Neugeborenen weder Uratzellen noch Zeichen einer schwereren Veränderung der Epithelzellen auffinden. Neuerdings hatte er Gelegenheit wieder einen Fall zu untersuchen, bei dem schon mit bloßen Augen neben sehr reichlichen Harnsäurestreifen im Mark auch Ablagerungen in der Rinde der Nieren gesehen werden konnten. Das Kind war 48 Stunden nach der Geburt an Verblutung aus einem Duodenalgeschwür gestorben und nach weiteren 48 Stunden secirt worden; die Nieren wurden in absolut. Alkohol gehärtet. Es zeigten sich mikroskopisch reichliche Harnsäureablagerungen in den Sammelröhren und in den Schaltstücken. In den gewundenen Kanälchen I. Ordnung wurden keine Ablagerungen gefunden, in den Schleifen nur ganz vereinzelte Spuren. Die Ablagerungen bestanden in den Schaltstücken aus relativ kleinen Kugeluraten; feine Körnchen wie an der Oberfläche der Epithelien der Kaninchennieren wurden nicht gefunden; in den Sammelröhren lagen große und kleine Kugelurate. Alle diese Ablagerungen fanden sich im Lumen der Harnkanälchen, nirgends in Zellen; auch ließ sich keine einzige Uratzelle nachweisen. Löste man die Harnsäure, so fand man ein den Uratkugeln entsprechendes Eiweißgerüst, in welchem hie und da, aber nur selten und fast nur in den Sammelröhren, kernhaltige Zellen eingeschlossen

waren, der Mehrzahl nach mechanisch losgelöste Epithelien, welche nichts von den Veränderungen der Uratzellen aufwiesen, zum kleinen Theil vielleicht Leukocyten. Neben den Kugeluraten fanden sich hyalin-streifige Cylinder in den gewundenen Kanälchen, geronnenes Eiweiß auch in dem Kapselraum eines Nierenkörperchens. An den Epithelien der Rindensubstanz waren nirgends schwerere Veränderungen, Zerfall oder dergleichen zu sehen. Vielfach erkannte man noch den Bürstensaum, an anderen Stellen war die Oberfläche unregelmäßig gestaltet und ging in ein das Lumen der Kanälchen erfüllendes körniges und fädiges Netzwerk über. Es muß unentschieden bleiben, wie weit hier bereits cadaveröse Veränderungen vorliegen.

Also auch in diesem neuen Falle fand sich keine Bestätigung für die von Ebstein und Nicolaier ausgesprochene Vermuthung, daß auch beim menschlichen Harnsäureinfarct der Zerfall von Nierenepithelien eine Rolle spielt, wohl aber fanden sich auch unabhängig von den Uratablagerungen Eiweißcylinder, welche auf eine Schädigung der Glomeruli hinweisen und wohl das Material für das Eiweißgerüst der Uratkugeln geliefert haben könnten.

In einer zweiten Untersuchungsreihe handelte es sich um Harnsäureablagerungen im Blute von Hühnern nach Unterbindung der Ureteren. Es wurden vor allem in den Nierenvenen und zwar hauptsächlich da, wo Capillaren oder kleine Aeste einmünden, Krystallbüschel in dem Venenlumen gefunden, deren einzelne Nadeln in der Richtung des Blutstromes umgebogen sind, wie die Sumpfgewächse in einem fließenden Bach[1]). Hier muß also die Krystallisation eingetreten sein, während noch Blutstrom war, d. h. während das Blut noch lebend war. Darum können die neben den größeren Krystallbüscheln gefundenen Degenerationserscheinungen an den Blutzellen, insbesondere Kernzertrümmerung an den oft auffällig reichlich vorhandenen Leukocyten nicht vor der Krystallbildung da gewesen sein, sondern sind erst mit der Ausscheidung entstanden, welche hauptsächlich da erfolgte, wo die Concentration am größten war (Nierenvenen) und wo die agonale Stromverlangsamung besonders stark sich geltend macht (am Uebergange des Capillarnetzes in die weiten Venen).

Aschoff schließt sich demnach jenen Autoren an, welche Ebstein's Ansicht, daß erst die Necrosen im Gewebe die Aus-

1) Die Fig. 6 Tafel VI der Verhdl. d. d. path. Ges. II, welche dem Verf. nicht zur Correctur vorgelegen hat, gibt dieses Verhältniß bei weitem nicht so ausgeprägt wieder wie die Originalzeichnung und die Präparate.

krystallisation der Harnsäure bedingten, zurückweisen, meint vielmehr, daß umgekehrt die Krystallisation die Ursache der Necrosen sei.

15. Der in der letzten Zeit so viel behandelten Frage nach dem Verhalten der Deckzellen seröser Häute bei Entzündungen hat der Volontärassistent Herr Dr. Herxheimer fortgesetzt seine Aufmerksamkeit geschenkt. Er konnte immer von neuem feststellen, daß diese Zellen bei den fibrinösen Entzündungen unter dem Fibrin sich erhalten können, an dessen Rand er sie oft unmittelbar in die Deckzellenschicht der exsudatfreien Abschnitte verfolgen konnte. Gerade hier, am Rande des Exsudates, zeigten diese Zellen sehr früh und am stärksten Wucherungserscheinungen, bei denen es sich mehr um direkte als um indirekte Kerntheilungen zu handeln scheint; es kommt dabei zur Bildung von Riesenzellen, welche in einer größeren Reihe von Fällen gefunden wurden.

Ganz besonderes Augenmerk wurde auf die mit epithelähnlichen Zellen ausgekleideten drüsenartigen Spalten gerichtet, welche an der Grenze der alten Serosa und des aus ihr hervorgesprossenen Granulationsgewebes gefunden werden, — bei den fibrinösproduktiven einfachen und tuberkulösen Entzündungen gar nicht selten, wenn man nur gehörig danach sucht!

In einem Falle fibrinös-produktiver Pericarditis wurde außer zahlreichen Spalten auch eine kleine kugelige Cyste gesehen, welche von großen epithelähnlichen Zellen ausgekleidet war und im Innern Wanderzellen enthielt. Sie lag an gleicher Stelle wie die Spalten, gegen das Fibrin sich vorwölbend, und darf wohl sicher als eine cystisch umgewandelte Spalte angesehen werden.

Bei demselben Herzbeutel ließen sich an Serienschnitten Deckzellenreihen von der Unterfläche des Fibrin durch dieses hindurch bis auf seine Oberfläche verfolgen; die Streifen waren dabei häufig ineinander gerollt, offenbar abgehoben. Damit verlieren die Befunde von solchen Zellen über dem Fibrin ihre Bedeutung für die Frage nach der Herkunft des Faserstoffs.

Den bei fibrinös-produktiven Entzündungen vorkommenden ähnliche Spalten finden sich auch, wie schon Ribbert angegeben hat, unter den sog. Sehnenflecken des Herzbeutels und H. meint, daß sie auch ähnlich entstanden seien, nämlich durch Durchbruch des wuchernden Bindegewebes zwischen den Epithelinseln und Vereinigung benachbarter Gewebssprossen über denselben.

Auf einen Uebergang der Deckzellen in Bindegewebe wies in H.'s Präparaten nichts hin.

16. Eine andere Untersuchungsreihe des Herrn Herxheimer betraf das Vorkommen von Fibrin bei Darmveränderungen, zu dessen Nachweis die verschiedensten Färbemethoden angewandt wurden. Am meisten findet sich dasselbe in der Submucosa bei verschiedenen Erkrankungen, insbesondere auch bei Typhus in der Umgebung der markig geschwollenen Lymphknötchen, aber es kommt auch als echtes fibrinöses Exsudat auf der Oberfläche der Schleimhaut vor, bei der sog. Darmdiphtherie, gleichgültig, welcher Ursache diese ihre Entstehung verdankt, wenn auch die Menge der Auflagerung gegenüber dem von den Rachengebilden und Athmungswegen Bekannten nur eine geringe zu sein pflegt. Das Fibrin trat dabei nicht innerhalb der Lieberkühn'schen Krypten auf, welche nur Schleim enthielten.

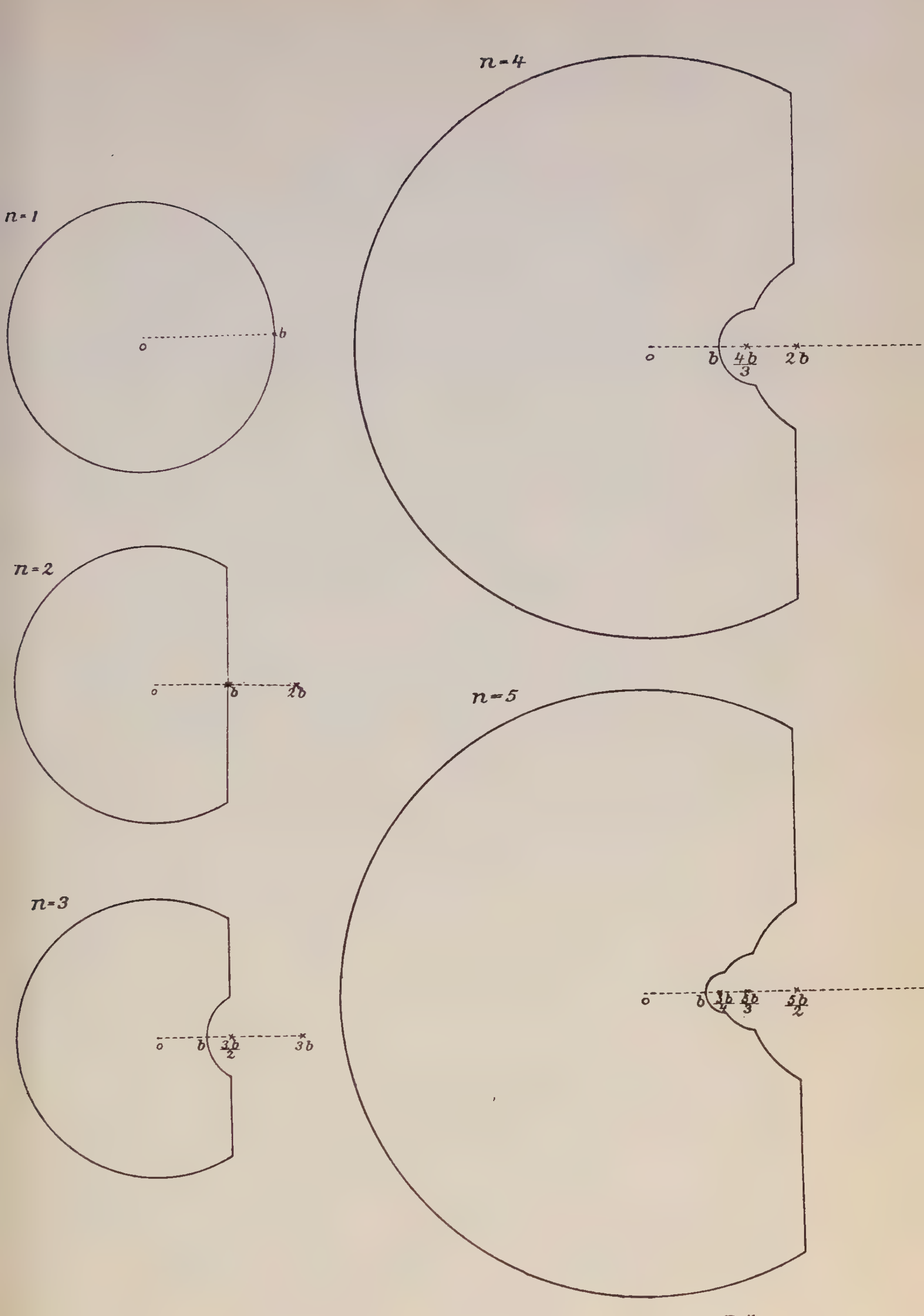
Unter den untersuchten Fällen befanden sich 2, bei welchen die Darmdiphtherie nach Laparotomien, welche nicht des Darmes wegen gemacht worden waren, vorgefunden wurde. In beiden fanden sich außer dem gewöhnlichen Fibrinbefund noch hyaline, Weigert'sche Fibrinfärbung annehmende Thromben in Gefäßen, besonders in den kleinen dicht unter der Schleimhautoberfläche. Es war in beiden Fällen nur sehr wenig Sublimat zur Desinfection benutzt worden.

17. Auf einem anderen Gebiete als die gewöhnlichen Institutsarbeiten bewegt sich eine Untersuchung, welche ich über das Alter der Pockenkenntniß in Indien und China mit gütiger Unterstützung der Herren Sanskrit - Professoren Kielhorn-Göttingen und Jolly-Würzburg angestellt habe und worüber ich demnächst einige Bemerkungen in der Zeitschrift Janus veröffentlichen werde.

Auf Grund der Angaben des englischen Arztes Holwell wurde bis in die neueste Zeit angenommen, daß in dem Atharva-Veda, der mindestens 1000 Jahre vor Chr. Geburt zurückreicht, nicht nur die Pocken erwähnt sind, sondern auch an eine Pockengöttin zu richtende Gebete mitgetheilt werden, welche natürlich auf ein noch weit höheres Alter der Pockenkenntniß der alten Inder hinweisen würden. Die Angabe ist aber nach jeder Richtung hin falsch, eine Erwähnung der Pocken kommt erst in den nach Christi Geburt entstandenen Werken vor und eine Pockengöttin gar erst im 16. Jahrhundert. Mögliche Beziehungen zwischen den Pockengöttinnen gewisser indischer Gegenden, wo diese als Frau (Jungfrau) mit einem Kinde auf den Armen dargestellt werden, und der Gottesgebärerin Maria werden kurz erörtert.

In Bezug auf die Pockenkenntniß der Chinesen wird das litte-

rarische Schicksal einer Angabe eines jesuitischen Missionars aus dem 18. Jahrhundert geschildert. Aus der Mittheilung des Jesuiten, daß nach einem wenige Jahre vor seinem, 1779 gedruckten, Bericht ein chinesisches Buch über die Pocken erschienen sei, welches angebe, daß die Pocken in China unter der Dynastie der Tcheou, welche 1120 v. Chr. zu regieren begann, aufgetreten seien, ist fast allgemein die Angabe hervorgegangen, daß die Pocken 1120 v. Chr. aufgetreten seien, schließlich aber ist gar daraus die Nachricht entstanden, es sei 1120 v. Chr. ein chinesisches Buch erschienen, welches Nachrichten von den Pocken gebe etc. Da die Dynastie der Tcheou bis ca. 250 v. Chr. regiert hat, so besagt dies im 8. Jahrzehnt des 18. Jahrhunderts verfaßte chinesische Werk nur, daß in China die Pocken zwischen dem 12. und dem 3. Jahrhundert vor Christi Geburt aufgetreten seien, wie bereits Hirsch, ohne überall Beachtung zu finden, in der 2. Auflage seiner Historisch-geographischen Pathologie richtig bemerkt hat. —



G. Mittag-Leffler, Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe.

Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (IX).

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Juni 1900.

I) Ueber Aufspaltung cyklischer Oxime.

Die Fortführung der Untersuchungen über das Verhalten cyklischer Oxime gegen umlagernde Agentien (Nach. d. K. G. d. W. 1893, 747; 1894 59. 165; 1899. 128.) hat neuerdings, wenigstens für die Gruppe der gesättigten Ketone, zu abschließenden Resultaten geführt. Die Art wie die Umlagerung erfolgt, hat vollständig aufgeklärt werden können, nachdem es gelungen ist, die Umlagerungsproducte, welche immer noch cyklische Verbindungen vorstellen, zu offenen Ketten aufzuspalten, für die den Constitutionsnachweis zu führen dann verhältnißmäßig leicht ist.

Die Aufspaltung der sog. „Isoxime", welche am bequemsten durch Einwirkung conzentrirter Schwefelsäure auf die normalen Oxime gewonnen werden, führt unter Wasseraufnahme zu Amidosäuren der Fettreihe. Daraus folgt, daß die Isoxime gesättigter Ketone nichts anderes sind als die inneren Anhydride (Lactame) von Amidosäuren.

Durch die mitzutheilende Untersuchung werden eine Reihe von Amidosäuren zu ziemlich bequem zugänglichen Verbindungen und damit ist auch der Weg angebahnt das Verhalten dieser Körper eingehender zu erforschen. So hat sich z. B. herausgestellt, daß Amidosäuren mit normaler Kohlenstoffkette und Fernstellung der NH_2-Gruppe vom Carboxyl bei der Behandlung mit Natriumnitrit leicht in ungesättigte Säuren übergehen, daß sie also ein Verhalten zeigen, welches man auf Grund der bisherigen

Forschungen nur für β-Amidosäuren erwarten durfte. Die Untersuchung hat sich bisher auf folgende Verbindungen erstreckt:

1) Pentacyklische Ketone.

a) Cyklopentanon.

Das Pentanonoxim $\begin{matrix} CH_2\,CH_2 \\ | \\ CH_2\,CH_2 \end{matrix}\!\!>C:NOH$ wird durch concentrirte Schwefelsäure in ein Isoxim übergeführt, das in seinem Verhalten die größte Aehnlichkeit mit dem schon von Schotten und Gabriel untersuchten α-Piperidon $\begin{matrix} CH_2\,CH_2-CO \\ | \quad\quad\quad | \\ CH_2\,CH_2-NH \end{matrix}$ zeigte, dem inneren Anhydrid der δ-Amido- Valeriansäure. Das wirklich die auf verschiedenem Wege gewonnenen Körper identisch sind, geht aus folgenden Versuchen hervor.

Das Isoxim des Pentanons giebt beim Erhitzen mit concentrirter Salzsäure das Chlorhydrat einer Amidosäure, deren Schmelzpunkt bei 157—158° liegt. Das ist aber der Schmelzpunkt der δ-Amido-Valeriansäure. Auch die bei 106° schmelzende Benzoyl-Verbindung der Säure aus Pentanonisoxim stimmt in ihren Eigenschaften ganz mit der Benzoyl-δ-Amido-Valeriansäure überein.

Ferner wurde nachgewiesen, daß Piperidon beim Erhitzen mit Phosphorpentoxyd in Pyridin übergeführt werden kann.

b) Cyklo-β-Methylpentanon.

Die Verbindung wurde aus β-Metyladipinsäure dargestellt. Von den beiden aus dem Keton entstehenden Oximen wurde wesentlich die schwerer lösliche, bei 86° schmelzende Modification benutzt. Das daraus dargestellte Isoxim ist luftbeständig, schmilzt bei 87° und siedet bei 15mm bei 147—148°. In Wasser ist er sehr löslich. Es ist rechts drehend. Durch Erhitzen mit Salzsäure wird die Verbindung zum Chlorhydrat einer Amidosäure aufgespalten, welche unter Zersetzung bei 133—135° schmilzt, in Wasser sehr löslich und auch schwach rechtsdrehend ist.

Unter der jetzt zulässigen Voraussetzung, daß das Umlagerungsproduct der β-Methylpentanonoxims ein Methylpiperidon ist, hat man für die gewonnene Amidosäure die Entscheidung zwischen den beiden Formeln:

1) $CH_2(NH_2)CH(CH_3)CH_2CH_2CO_2H$ und
2) $CH_2(NH_2)CH_2CH(CH_3)CH_2CO_2H$

zu treffen, d. h. man hat es mit einer β- oder γ-Methyl-δ-Amido-Valeriansäure zu thun.

2) Hexacyklische Ketone.

a) Cyklohexanon.

Das bei 88° schmelzende Hexanonoxim geht bei der Isomerisation in ein sehr schön krystallisirendes, in Wasser leicht lösliches Isoxim über, das bei 12mm bei 139° siedet und bei 68—70° schmilzt. Die daraus durch Aufspaltung mit Salzsäure gewonnene Amidosäure bildet ein leicht erstarrendes Chlorhydrat. Die freie Säure krystallisirt leicht aus Wasser oder verdünntem Alkohol und schmilzt bei 201—202°. Die Säure ist identisch mit ε-Amidocapronsäure, welche auch bereits von Gabriel auf synthetischem Wege gewonnen wurde und deren inneres Anhydrid genau die Eigenschaften des Hexanonisoxims theilt. Auch die Goldsalze aus beiden Verbindungen besitzen denselben Schmelzpunkt. Die Isomerisation des Hexanonoxims erfolgt also in folgendem Sinne:

$$\begin{array}{l} CH_2-CH_2-CH_2 \\ | \qquad\qquad | \\ CH_2-CH_2-C:NOH \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} CH_2\,CH_2\,CH_2 \\ | \\ CH_2\,CH_2\,CO \end{array}\right> NH$$

Die ε-Amidocapronsäure giebt, mit Natriumnitrit behandelt, δ-ε-Hexensäure $CH_2:CH\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CO_2H$ von folgenden Eigenschaften: Siedepunkt 208—210°; d = 0,962; n_D = 1,4345 bei 23°.

b) β-Methylhexanon.

Das Oxim des β-Cyklomethylhexanons liefert, wie früher schon beschrieben wurde, zwei isomere Isoxime, die bei der Aufspaltung auch zwei isomere Säuren geben, deren Verhalten ich gemeinsam mit Herrn L. Ottemann näher zu studieren im Begriffe bin.

1) Verbindungen aus dem α-Isoxim des β-Methylhexanons vom Schmelzpunkt 104—105°.

Die Amidocapronsäure, welche durch Aufspaltung daraus gewonnen wird, schmilzt bei 187—188° unter Zersetzung. Salpetrige Säure führt sie in eine Oxysäure über, welche theils ein Lacton, theils eine Heptylensäure $C_7H_{12}O_2$ von folgenden Eigenschaften liefert: Siedepunkt 218—224°, d = 0.961, n = 1.44154 bis 21°, M = 35.21 (ber. 35.63). Das Amid dieser Säure schmilzt bei 90—91°.

2) Verbindungen aus dem β-Isoxim (Schmelzpunkt 68°). Die Amidocapronsäure daraus schmilzt bei 145—147°, die aus ihr

mittelst salpetriger Säure gewonnene Heptylensäure siedet bei 220—225°, ihr Amid schmilzt bei 77—78°.

c) Menthon = Methyl(2)-Isopropyl (1)-Hexanon.

Das schon früher beschriebene bei 119—120° schmelzende, aus l-Menthonoxim gewonnene Isoxim ist sehr leicht zu dem Chlorhydrat einer Säure aufspaltbar. Diese Amidomenthylsäure, wie sie der Kürze wegen genannt werden soll, besitzt die empirische Zusammensetzung $C_9H_{18}(NH_2).CO_2H$. Sie ist in Wasser reichlich, in absolutem Alkohol sehr wenig löslich und krystallisirt in schönen, bei 194—195° unter Zersetzung schmelzenden Krystallen.

Bei der Destillation giebt sie Wasser ab und verwandelt sich in ihr Anhydrid, das Menthonisoxim.

Die Benzoylverbindung der Säure, $C_9H_{18}(NHCOC_6H_5)CO_2H$, schmilzt bei 127—128° und ist im Gegensatz zu der Muttersubstanz in Alkohol leicht löslich.

Beim Erwärmen mit Natriumnitrit setzt sich das Chlorhydrat der Amidosäure ziemlich glatt um, unter Bildung einer mit Wasserdämpfen flüchtigen ungesättigten Säure $C_{10}H_{18}O_2$.

Diese Säure siedet unter gewöhnlichem Druck constant bei 257—259°, d = 0,92; α_D = 1.4496 bei 20°.

M = 49.62 (berechnet für $C_{10}H_{18}O_2$ $\digamma$ = 49.44)

Die Säure stimmt in ihren Eigenschaften also vollständig überein mit der von mir früher aus dem Menthonitril erhaltenen Menthonensäure (Ann d. Chem. 296, 121). Auch die Amide beider Verbindungen zeigen denselben Schmelzpunkt, nämlich 104—105°.

d) Tetrahydrocarvon = Methyl(1)-Isopropyl(2)-Hexanon.

Tetrahydrocarvoxim wurde in das bei 104° schmelzende Isoxim übergeführt und dieses mit Salzsäure aufgespalten. Aus dem resultirenden Chlorhydrat wurde die freie Säure mit Hülfe von Silberoxyd isolirt. Die Amidosäure, welche selbstverständlich mit der aus Menthonisoxim dargestellten isomer ist, krystallisirt weniger gut als jene. Sie ist in kaltem Wasser nur schwer löslich und krystallisirt aus Lösungen, welche in der Siedhitze bereitet wurden, nur langsam aus. Der Schmelzpunkt der Säure liegt bei 201—202°. Bei dieser Temperatur tritt gleichzeitig Zersetzung ein.

Mit Natriumnitrit setzt sich diese Amidosäure unter Bildung einer Decylensäure von folgenden Eigenschaften um:

Siedepunkt: 257—260°, d = 0,936, n_D = 1,4544 bei 20°.

M = 49.21 (berechnet für $C_{10}H_{18}O_2$ $\digamma$ = 49.44).

Dem Isoxim aus Tetrahydrocarvon kann nur eine der beiden folgenden Formeln zukommen:

$$\begin{matrix} CH_2\,CH_2\,CH\,(CH_3) \\ | \\ CH\,(C_3H_7)\,CH_2\,CO \end{matrix} > NH \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} CH_2\,CH_2\,CH\,(CH_3) \\ | \\ CH\,(C_3H_7)\,CH_2\,NH \end{matrix} > CO$$

zwischen denen noch zu entscheiden bleibt. Hr. Fresenius setzt die Untersuchung der Verbindung fort.

3) Heptacyklische Ketone.

Suberon.

Das Isoxim des Suberons ist eine gut krystallisirende, aber zerfließliche Verbindung, deren Chlorhydrat jedoch luftbeständig ist. Letzteres liefert bei der hydrolytischen Spaltung ein gut krystallisirendes Salz einer Amido-Heptylsäure. Die freie Säure krystallisirt auch gut und schmilzt bei 186—187°. Bei der Behandlung mit Natriumnitrit entsteht daraus eine Heptylensäure, $C_7H_{12}O_2$, welche bei 225°—227° siedet, d = 0,952 n_D, = 1.4425bei 17°.
M = 35.63 (berechnet für $C_7H_{12}O_2$ F = 35.61).

Diese Heptylensäure konnte durch Oxydation in normale Adipinsäure vom Schmelzpunkt 148° übergeführt werden. Daraus folgt, daß die Säure ($C_7H_{12}O_2$) eine ε-ζ-ungesättigte Säure der Formel $CH_2:CH\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CO_2H$ sein muß und es folgt weiter, daß die Amidosäure, aus der sie entstanden ist, eine ζ-Amidosäure $CH_2\,(NH_2)\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CO_2H$ sein dürfte und das Isosuberonoxim deren Anhydrid:

$$\begin{matrix} CH_2\,.\,CH_2\,.\,CH_2\,.\,CO \\ | \qquad\qquad\qquad | \\ CH_2\,.\,CH_2\,.\,CH_2\,.\,NH. \end{matrix}$$

II. Neue Synthesen in der Terpenreihe.

Durch Reformatzky und Saytzeff ist eine synthetische Methode ausgebildet worden, Verbindungen, welche Ketonenartig gebundenen Sauerstoff enthalten, mit hologenisirten Säureestern durch Vermittelung von metallischem Zink zu condensiren. Tiemann hat diese Methode neuerdings benutzt (Ber. chem. Ges. 33, 563), um aus Iso-Methylheptenon eine isomere Geraniumsäure aufzubauen, nachdem Barbier und Bouveault die Geraniumsäure selbst synthetisch aus dem gewöhnlichen Methylheptenon in der Weise gewonnen hatten, daß sie das Keton mit Jodessigester und Zink condensirten und der aus dem Condensationsprodukt abgeschiedenen Oxysäure Wasser entzogen. Tiemann zeigte, daß die Synthesen

besser verlaufen, wenn man statt von jodirten von bromirten Säureestern ausgeht.

Das einfache und durchsichtige Prinzip dieser Methode ist nun noch nie auf cyklische Verbindungen übertragen worden, obgleich es gerade hier — falls anwendbar — die Darstellung einer großen Reihe theoretisch interessanter Verbindungen ermöglichen würde.

Ich habe mich daher mit Herrn Dr. v. Braun verbunden, um zunächst die Vorfrage zu lösen, in wie weit für die fragliche Reaction cyklische Ketone sich überhaupt brauchbar erweisen würden. Es zeigte sich sehr bald, daß in vielen Fällen der Reactionsverlauf ein überraschend glatter ist. Wir haben darauf hin die Synthesen in systematischer Weise in Angriff genommen und beabsichtigen, dieselben mit Hülfe von Schülern nach verschiedenen Gesichtspunkten durchzuführen.

Von den bisher erhaltenen Resultaten sollen nachstehend einige kurz mitgetheilt werden.

Methylhexanolessigsäure.

Gemeinsam mit Herrn I. Salkind habe ich die Einwirkung von Bromessigsäureaethylester und -methylester bei Gegenwart von Zink auf Methylhexanon studirt.

Die Reaction verläuft unerwartet glatt in folgendem Sinne:

```
CH2 CH (CH3) CH2                               CH2 CH (CH3) CH2
|                 |  + CH2 Br CO2 R + Zn =     |                |  / O Zn Br
CH2  CH2 —— CO                                 CH2 CH2 ——— C
                                                              \ CH2 CO2 R

CH2 CH (CH3 CH2
|              / O ZnBr                          CH2 CH(CH3)CH2
CH2 CH2 — C           + SO4H2 = SO4Zn + BrH +    |              |  / OH
               \ CH2 CO2 R                       CH2   CH2    C
                                                                \ CH2CO2R.
```

Der Oxyaethylester, oder der Methylhexanol-Essigester, wie man die Verbindung auch nennen kann, siedet bei 21^{mm} bei 127—129°, bei gewöhnlichem Druck bei 254—256°. Er stellt eine dem Benzoesäureester ähnlich riechende Flüssigkeit vor. Von den physikalischen Constanten wurde ermittelt:

$$d = 1.0035,\ n_D = 1.4581 \text{ bei } 18^0.$$

$$M = 54.12 \text{ (berechnet für } C_{11} H_{19} O_3 = 54.02)$$

Der Ester ist sehr schwer verseifbar und erleidet dabei z. Th. hydrolytische Spaltung unter Bildung von Methylhexanol. Die zu-

gehörige Säure ist flüssig und liefert ein schwer lösliches Silbersalz.

Geeignete wasserentziehende Mittel wirken auf den Oxyester Wasser abspaltend. Es entsteht dabei der Ester einer ungesättigten Säure. Je nach der Art der Wasserabspaltung muß dieser Verbindung eine der 3 folgenden Formeln zukommen

I

$$\begin{array}{l} CH_2\,CH\,(CH_3)\,CH \\ | \qquad\qquad\qquad\quad \cdot\cdot \\ CH_2\,.\,CH_2\,.\,C\,.\,CH_2\,C\,O_2\,C_2\,H_5 \end{array}$$

oder

II

$$\begin{array}{l} CH_2\,CH(CH_3)\,CH_2 \\ | \qquad\qquad\qquad\quad | \\ CH_2\,.\,CH\ :\ C\,.\,CH_2\,CO_2\,C_2\,H_5 \end{array}$$

III

oder

$$\begin{array}{l} CH_2\ CH\,(CH_3)\,CH_2 \\ | \qquad\qquad\quad / \\ CH_2\,.\,CH_2\,.\,C:CH\,CO_2\,C_2\,H_5. \end{array}$$

Der ungesättigte Ester siedet bei 23^{mm} zwischen $111-112^0$, bei gewöhnlichem Druck zwischen $229-231^0$. Ferner wurde gefunden:

$$d = 0.9555,\ n_D = 1.46207.$$

$$M = 52.08 \text{ (berechnet für } C_{11}\,H_{18}\,O_2\ F = 52.106).$$

Bei der Verseifung des Esters entsteht gleichfalls eine flüssige Säure, welche ein gut krystallisirendes Amoniumsalz und ein schwer lösliches Silbersalz liefert.

Bei der Behandlung des Oxyesters mit Eisessig-Bromwasserstoff wird Hydroxyl gegen Brom ausgetauscht.

Bihydrocarveolessigsäure.

Bei der Einwirkung von Zink auf ein molekulares Gemenge von Bihydrocarvon und Bromessigaethylester entsteht die Verbindung $C_{10}\,H_{16}\,(OH)\,CH_2\,CO_2\,C_2\,H_5$.

Der Geruch dieses Esters erinnert an den des Cedernöls. Er siedet bei 17^{mm} zwischen 168^0, bei gewöhnlichem Druck zwischen $282-288^0$, $d = 0.997$ $n_D = 1.47664$.

$$M = 67.44 \text{ (berechnet } 67.98 \text{ für } C_{14}\,H_{24}\,O_3\ F)$$

Die freie Bihydrocarveolessigsäure kann krystallisirt erhalten werden, ebenso deren Ammoniaksalz. Beide Verbindungen zersetzen sich bei der trockenen Destillation theilweise unter Kohlensäureabspaltung. Das dabei entstehende angenehm riechende Product siedet nach dem Trocknen über metallischem Natrium bei etwa 195^0. Die Verbindung scheint aus einem Kohlenwasserstoff zu bestehen, der deshalb besonders Interesse beansprucht, weil ihm die Formel $C_{11}\,H_{18}$ zukommen muß und er ein auf synthetischem Weg

gewonnenes höheres Homologes des Limonen vorstellen würde, dessen Bildung man sich durch folgende Formeln veranschaulichen kann.

```
      CH3                  CH3                        CH3
      |                    |                          |
      CH                   CH  OH                     C
     /  \                 /  \ /                     /  \\
  CH2    CO            CH2    C—CH2 CO2 H         CH2    C. CH3
   |      |             |     |                    |     |
  CH2    CH    ——→     CH2   CH2        ——→       CH2   CH2
     \  /                 \  /                       \  /
      CH                   CH                         CH
      |   CH2              |   CH2                    |   CH2
      |  //                |  //                      |  //
      C                    C                          C
       \                    \                          \
        CH3                  CH3                        CH3
```

Bihydrocarvon Bihydrocarveolessigsäure Homo-Limonen

Ob die Stelle der Doppelbindungen im Homo-Limonen die hier angenommene ist, muß allerdings noch durch besondere Versuche geprüft werden, mit denen Herr Thölke beschäftigt ist.

Thujol- und Isothujolessigsäure.

Nach Versuchen, die Herr Dr. Leimbach auf meine Veranlassung ausgeführt hat, lassen sich Thujon und Isothujon leicht mit Bromessigester condensiren. Die erhaltenen Ester geben bei der Verseifung Säuren, welche gut krystallisiren.

Die Thujolessigsäure $C_{10}H_{16}(OH)CH_2CO_2H$ schmilzt bei 90—91°, ist in organischen Lösungsmitteln leicht löslich und kann aus einem Gemisch von Benzol und Petrolaether in schönen Krystallen erhalten werden. Die isomere Isothujolessigsäure ist in kaltem Alkohol schwer löslich und krystallirt daraus in Krystallen die bei 168—170° unter Zersetzung schmelzen.

Carvolessigsäure, auf entsprechendem Wege dargestellt, ist gleichfalls eine krystallisirende Verbindung.

Suberolessigsäure wurde aus ihrem um 245° siedenden Methylester von Herrn van Beeckh hergestellt. Die Säure hat besonderes Interesse, nicht nur weil sie isomer mit Methylhexanolessigsäure ist, sondern auch weil sie als höhere Homologe der „Suberolglycolsäure" (Oxysuberansäure), anzusprechen ist, welche von Spiegel aus dem Suberoncyanhydrat gewonnen wurde (Annal. d. Chem. 211, 118), welche man aber auch als Suberolameisensäure bezeichnen kann.

```
CH2 CH2 CH2                      CH2 CH2 CH2
|            > C(OH) CO2 H       |            > C(OH) CH2 CO2 H
CH2 CH2 CH2                      CH2 CH2 CH2
```

Suberolameisensäure Suberolessigsäure.

Herr Dr. von Braun hat es übernommen einige mit den eben beschriebenen Essigsäure-Derivaten homologe Verbindungen zu bearbeiten, welche von theoretischen Gesichtspunkten aus ein besonderes Interesse besitzen und ist bisher zu folgenden Resultaten gekommen:

β-Methylhexanol-α-Propionsäureester

$$\begin{array}{l} CH_2\,CH\,(CH_3)CH_2 \\ \quad | \qquad\qquad\quad | \;/OH \\ CH_2 — CH_2 — C \\ \qquad\qquad\qquad\quad \backslash \\ \qquad\qquad\qquad\quad CH\,(CH_3)\,CO_2\,C_2\,H_5 \end{array}$$

wurde aus Methylhexanon und α-Brompropionsäureester bei Gegenwart von Zink dargestellt. Der Ester siedet bei 8^{mm} zwischen 128–130°. Bei der Verseifung des Esters mit alkoholischem Alkali findet eine theilweise hydrolytische Spaltung statt, unter Bildung von Methylhexanol, Metylhexanon und Propionsäure. Zum anderen Theil entsteht Methylhexanolpropionsäure, welche aber sogleich intramolecular Wasser abzuspalten scheint.

β-Metylhexanon und Bromisobuttersäureester lassen sich gleichfalls condensiren. Neben dem erwarteten Oxyester treten immer die Producte auf, welche aus Methylhexanon durch Selbstcondensation entstehen. Der daneben entstehende Methylhexanolisobuttersäureester wird bei der Verseifung sehr leicht in Metylhexanon und Isobuttersäure gespalten. Dagegen gelingt es den Ester durch Behandlung mit Kaliumbisulfat in eine wasserärmere Verbindung überzuführen, welche bei 8^{mm} bei 116° siedet und vermutlich die Verbindung

$$\begin{array}{l} CH_2\,CH\,(CH_3)\,CH \\ | \qquad\qquad\quad \| \\ CH_2 — CH_2 — C — C\,(CH_3)_2\,.\,CO_2\,C_2\,H_5 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l} CH_2\,CH\,(CH_3)\,CH_2 \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CH_2 \quad CH = C — C\,(CH_3)_2\,CO_2\,C_2\,H_5 \end{array}$$

vorstellt.

Dieser Ester lässt sich gut verseifen und giebt dabei eine Säure, welche, wie zu erwarten war, bei der Destillation unter gewöhnlichem Druck Kohlensäure abspaltet, um einen mit Menthen isomeren Kohlenwasserstoff $C_{10}\,H_{18}$ zu liefern, welcher als ein Repräsentant der Meta-Terpenreihe anzusprechen ist.

Ueber das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Electricität.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Juli 1900.

In der Theorie des Galvanismus und der Wärme, die ich der K. G. d. W. in der Sitzung vom 19. Februar 1898 vorgelegt habe, ist für das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Electricität der folgende Ausdruck gegeben:

$$\frac{k}{v^2\gamma} = \frac{3}{8}\,\frac{\mu_p c_p^3 P_0 l_p^0 + \mu_n c_n^3 N_0 l_n^0}{\frac{\varepsilon_p^2}{\mu_p c_p} P_0 l_p^0 + \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n c_n} N_0 l_n^0}\cdot T$$
$$\times \left\{1 + 4\delta t + \tfrac{2}{3}(\alpha + 3\delta)\, T\right\}.$$

Hier ist k die Leitfähigkeit für Wärme in mechanischem Maaß, $v^2\gamma$ die galvanische Leitfähigkeit in elektrostatischem Maaße. Ferner ist die molekulare Geschwindigkeit der Ionen oder Elektronen:

$$u_p = c_p\sqrt{T}\,(1+\delta t),\; u_n = c_n\sqrt{T}(1+\delta t)..$$

Die molekularen Weglängen sind bei einer Temperatur von 0° C. gegeben durch l_p^0 und l_n^0. Die Anzahlen der beweglichen positiven und negativen elektrischen Theilchen sind:

$$P = P_0\,(1+\delta' t),\; N = N_0\,(1+\delta' t).$$

T bezeichnet die absolute Temperatur, t die Temperatur in Graden Celsius.

Drude hat in seiner im Wesentlichen auf denselben Grund-

lagen ruhenden Theorie die Annahme hinzugefügt:

$$\tfrac{1}{2}\mu_p u_p^2 = \tfrac{1}{2}\mu_n u_n^2 = \alpha T.$$

Hier ist α eine universelle Constante, deren Werth aus dem Gasgesetz bestimmt werden kann.

Benützt man diese Annahme, um den von mir gefundenen Ausdruck zu vereinfachen, so ergiebt sich; wenn man zugleich $\varepsilon_p = \varepsilon_n = \varepsilon$ setzt:

$$\frac{k}{v^2\gamma} = \tfrac{3}{2}\frac{\alpha^2 v^2}{\varepsilon^2} T \left\{1+\tfrac{2}{3}\delta' T\right\}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Drude'schen durch den Zahlenfaktor, der bei Drude gleich $\frac{4}{3}$ ist.

Die Verschiedenheit ist wohl dadurch bedingt, daß Drude Stöße der Ionen unter sich berücksichtigt, während ich selbst nur Stöße gegen ruhende ponderable Theilchen betrachte. Ferner tritt bei mir von vornherein eine Temperaturkorrektion auf, die Drude erst später einführt.

Nach dem Gasgesetz ist

$$\alpha = \tfrac{3}{2}\mu R,$$

und daher:

$$\frac{k}{v^2\gamma} = \frac{27}{8}\frac{\mu^2}{\varepsilon^2} R^2\, T(1+\tfrac{2}{3}\delta' T).$$

Den numerischen Werth des auf der rechten Seite stehenden Faktors kann man nach einer zuerst von Reinganum gemachten Bemerkung bestimmen mit Hülfe der molekularen Geschwindigkeit der Wasserstoffionen und des Werthes, den bei ihnen das Verhältniß ε/μ besitzt. Es ist für dieselben:

$$R = 83 \times 10^6,\ \frac{\varepsilon}{\mu} = 0{,}29 \times 10^{15}.$$

Somit ergiebt sich:

$$\frac{k}{v^2\gamma} \times 10^{10} = 0{,}00276\, T(1+\tfrac{2}{3}\delta' T).$$

Setzt man der Theorie entsprechend allgemein:

$$\frac{k}{v^2\gamma}\cdot 10^{10} = L\, T(1+\tfrac{2}{3}\delta' T),$$

so kann man aus den Beobachtungen von Jäger und Diesselhorst die Constanten L und δ' berechnen. Man erhält dann die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe.

	$\delta'.10^6$	L		$\delta'.10^6$	L
Al	715	0.00180	Sn	— 356	0.00302
Cu II	226	0.00243	Pt	1065	0.00238
Cu III	245	0.00244	Pd	1155	0.00234
Ag	74	0.00258	Fe I	675	0.00273
Au	—125	0.00284	Fe II	792	0.00276
Ni	208	0.00256	Bi	—1590	0.00540
Zn	134	0.00249	Rotguss	— 291	0.00306
Cd	0	0.00269	Constantan	—1086	0.00532
Pb	326	0.00250			

Im Mittel aus sämtlichen Werthen ist $\overline{L} = 0{,}00290$. Läßt man die exstremen Werthe von Al, Bi, Constantan weg, so wird der Mittelwerth $\overline{\overline{L}} = 0{,}00263$. Der aus meiner Theorie folgende Werth von L ist gleich 0,00276; die Theorie von Drude giebt $L = 0{,}00245$.

Mathematische Probleme.

Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Von

D. Hilbert.

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unsrer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwickelung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? welche neuen Methoden und neuen Thatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken — auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens?

Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwickelung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der muthmaßlichen Entwickelung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passiren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt, und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht blos auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.

Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt

der mathematischen Wissenschaft im Allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Ueberfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbstständigen Entwickelung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont.

Es ist schwierig und oft unmöglich, den Wert eines Problems im Voraus richtig zu beurteilen; denn schließlich entscheidet der Gewinn, den die Wissenschaft dem Problem verdankt. Dennoch können wir fragen, ob es allgemeine Merkmale giebt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen.

Ein alter französischer Mathematiker hat gesagt: Eine mathematische Theorie ist nicht eher als vollkommen anzusehen, als bis du sie so klar gemacht hast, daß du sie dem ersten Manne erklären könntest, den du auf der Straße triffst. Diese Klarheit und leichte Faßlichkeit, wie sie hier so drastisch für eine mathematische Theorie verlangt wird, möchte ich viel mehr von einem mathematischen Problem fordern, wenn dasselbe vollkommen sein soll; denn das Klare und leicht Faßliche zieht uns an, das Verwickelte schreckt uns ab.

Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten — uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.

Die Mathematiker früherer Jahrhunderte pflegten sich mit leidenschaftlichem Eifer der Lösung einzelner schwieriger Probleme hinzugeben; sie kannten den Wert schwieriger Probleme. Ich erinnere nur an das von Johann Bernoulli gestellte *Problem der Linie des schnellsten Falles*. Die Erfahrung zeige, so führt Bernoulli in der öffentlichen Ankündigung dieses Problems aus, daß edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlege, und so hoffe er sich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn er nach dem Beispiele von Männern, wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor ihm dasselbe thaten, den ausgezeichneten Analysten seiner Zeit eine Aufgabe vorlege,

damit sie daran wie an einem Prüfsteine die Güte ihrer Methoden beurtheilen und ihre Kräfte messen könnten. Dem genannten Problem von Bernoulli und ähnlichen Problemen verdankt die Variationsrechnung ihren Ursprung.

Fermat hatte bekanntlich behauptet, daß die Diophantische Gleichung — außer in gewissen selbstverständlichen Fällen —

$$x^n + y^n = z^n$$

in ganzen Zahlen x, y, z unlösbar sei; *das Problem, diese Unmöglichkeit nachzuweisen*, bietet ein schlagendes Beispiel dafür, wie fördernd ein sehr specielles und scheinbar unbedeutendes Problem auf die Wissenschaft einwirken kann. Denn durch die Fermatsche Aufgabe angeregt, gelangte Kummer zu der Einführung der idealen Zahlen und zur Entdeckung des Satzes von der eindeutigen Zerlegung der Zahlen eines Kreiskörpers in ideale Primfaktoren — eines Satzes, der heute in der ihm durch Dedekind und Kronecker erteilten Verallgemeinerung auf beliebige algebraische Zahlbereiche im Mittelpunkte der modernen Zahlentheorie steht, und dessen Bedeutung weit über die Grenzen der Zahlentheorie hinaus in das Gebiet der Algebra und der Funktionentheorie reicht.

Um von einem ganz anderen Forschungsgebiete zu reden, so erinnere ich an das *Dreikörperproblem*. Dem Umstande, daß Poincaré es unternahm, dieses schwierige Problem erneut zu behandeln und der Lösung näher zu führen, verdanken wir die fruchtbaren Methoden und die weittragenden Principien, die dieser Gelehrte der himmlischen Mechanik erschlossen hat und die heute auch der praktische Astronom anerkennt und anwendet.

Die beiden vorhingenannten Probleme, das Fermatsche Problem und das Dreikörperproblem, erscheinen uns im Vorrath der Probleme fast wie entgegengesetzte Pole: das erstere eine freie Erfindung des reinen Verstandes, der Region der abstrakten Zahlentheorie angehörig; das andere uns von der Astronomie aufgezwungen und nothwendig zur Erkenntnis einfachster fundamentaler Naturphänomene.

Aber oftmals trifft es sich auch, daß das nämliche specielle Problem in die verschiedenartigsten Disciplinen mathematischen Wissens eingreift. So spielt das *Problem der kürzesten Linie* zugleich in den Grundlagen der Geometrie, in der Theorie der krummen Linien und Flächen, in der Mechanik und in der Variationsrechnung eine wichtige historische und principielle Rolle. Und wie überzeugend hat F. Klein in seinem

Buche über das Ikosaeder die Bedeutung geschildert, die dem *Problem der regulären Polyeder* in der Elementargeometrie, in der Gruppen- und Gleichungstheorie und in der Theorie der linearen Differentialgleichungen zukommt.

Um die Wichtigkeit bestimmter Probleme in's Licht zu setzen, darf ich auch auf Weierstrass hinweisen, der es als eine glückliche Fügung bezeichnete, daß er zu Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn ein so bedeutendes Problem vorfand, wie es das *Jacobische Umkehrproblem* war, an dessen Bearbeitung er sich machen konnte.

Nachdem wir uns die allgemeine Bedeutung der Probleme in der Mathematik vor Augen geführt haben, wenden wir uns zu der Frage, aus welchen Quellen die Mathematik ihre Probleme schöpft. Sicherlich stammen die ersten und ältesten Probleme in jedem mathematischen Wissenszweige aus der Erfahrung und sind durch die Welt der äußeren Erscheinungen angeregt worden. Selbst die Regeln des *Rechnens mit ganzen Zahlen* sind auf einer niederen Kulturstufe der Menschheit wohl in dieser Weise entdeckt worden, wie ja auch heute noch das Kind die Anwendung dieser Gesetze nach der empirischen Methode erlernt. Das Gleiche gilt von den *ersten Problemen der Geometrie*: den aus dem Alterthum überlieferten Problemen der Kubusverdoppelung, der Quadratur des Kreises und den ältesten Problemen aus der Theorie der Auflösung numerischer Gleichungen, aus der Curvenlehre und der Differential- und Integralrechnung, aus der Variationsrechnung, der Theorie der Fourierschen Reihen und der Potentialtheorie — gar nicht zu reden von der weiteren reichen Fülle der eigentlichen Probleme aus der Mechanik, Astronomie und Physik.

Bei der Weiterentwickelung einer mathematischen Disciplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermuthigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbstständigkeit bewußt; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äußere Anregung allein durch logisches Combiniren, durch Verallgemeinern, Specialisiren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklichster Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt dann selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund. So entstanden das *Primzahlproblem* und die übrigen Probleme der Arithmetik, die Galoissche Gleichungstheorie, die Theorie der algebraischen Invarianten, die Theorie der Abelschen und automorphen Funktionen und so entstehen überhaupt fast *alle feineren Fragen der modernen Zahlen- und Funktionentheorie.*

Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder von neuem die Außenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf, erschließt neue mathematische Wissensgebiete und, indem wir diese neuen Wissensgebiete für das Reich des reinen Denkens zu erwerben suchen, finden wir häufig die Antworten auf alte ungelöste Probleme und fördern so zugleich am besten die alten Theorien. Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogieen und jene scheinbar praestabilirte Harmonie, welche der Mathematiker so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt.

Wir erörtern noch kurz, welche berechtigten allgemeinen Forderungen an die Lösung eines mathematischen Problems zu stellen sind: ich meine vor Allem die, daß es gelingt, die Richtigkeit der Antwort durch eine endliche Anzahl von Schlüssen darzuthun und zwar auf Grund einer endlichen Anzahl von Voraussetzungen, welche in der Problemstellung liegen und die jedesmal genau zu formuliren sind. Diese Forderung der logischen Deduktion mittelst einer endlichen Anzahl von Schlüssen ist nichts anderes als die Forderung der Strenge in der Beweisführung. In der That die Forderung der Strenge, die in der Mathematik bekanntlich von sprichwörtlicher Bedeutung geworden ist, entspricht einem allgemeinen philosophischen Bedürfnis unseres Verstandes und andererseits kommt durch ihre Erfüllung allein erst der gedankliche Inhalt und die Fruchtbarkeit des Problems zur vollen Geltung. Ein neues Problem, zumal, wenn es aus der äußeren Erscheinungswelt stammt, ist wie ein junges Reis, welches nur gedeiht und Früchte trägt, wenn es auf den alten Stamm, den sicheren Besitzstand unseres mathematischen Wissens, sorgfältig und nach den strengen Kunstregeln des Gärtners aufgepfropft wird.

Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, daß die Strenge in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit wäre. An zahlreichen Beispielen finden wir im Gegenteil bestätigt, daß die strenge Methode auch zugleich die einfachere und leichter faßliche ist. Das Streben nach Strenge zwingt uns eben zur Auffindung einfacherer Schlußweisen; auch bahnt es uns häufig den Weg zu Methoden, die entwickelungsfähiger sind als die alten Methoden von geringerer Strenge. So erfuhr die Theorie der algebraischen Curven durch die strengere funktionentheoretische Methode und die folgerichtige Einführung transcendenter Hilfsmittel eine er-

hebliche Vereinfachung und größere Einheitlichkeit. Der Nachweis ferner, daß die Potenzreihe die Anwendung der vier elementaren Rechnungsarten, sowie das gliedweise Differentiiren und Integriren gestattet und die darauf beruhende Erkenntnis der Bedeutung der Potenzreihe, trug erheblich zur Vereinfachung der gesamten Analysis, insbesondere der Theorie der Elimination und der Theorie der Differentialgleichungen sowie der in derselben zu führenden Existenzbeweise bei. Das schlagendste Beispiel aber für meine Behauptung ist die Variationsrechnung. Die Behandlung der ersten und zweiten Variation bestimmter Integrale brachte zum Teil äußerst complicirte Rechnungen mit sich und die betreffenden Entwickelungen der alten Mathematiker entbehrten der erforderlichen Strenge. Weierstrass zeigte uns den Weg zu einer neuen und sicheren Begründung der Variationsrechnung. An dem Beispiel des einfachen Integrals und des Doppelintegrals werde ich zum Schluß meines Vortrages kurz andeuten, wie die Verfolgung dieses Weges zugleich eine überraschende Vereinfachung der Variationsrechnung mit sich bringt, indem zum Nachweis der notwendigen und hinreichenden Criterien für das Eintreten eines Maximums und Minimums die Berechnung der zweiten Variation und zum Teil sogar die mühsamen an die erste Variation anknüpfenden Schlüsse völlig entbehrlich werden — gar nicht zu reden von dem Fortschritte, der in der Aufhebung der Beschränkung auf solche Variationen liegt, für die die Differentialquotienten der Funktionen nur wenig variiren.

Wenn ich die Strenge in den Beweisen als Erforderniß für eine vollkommene Lösung eines Problems hinstelle, so möchte ich andererseits zugleich die Meinung widerlegen, als seien etwa nur die Begriffe der Analysis oder gar nur diejenigen der Arithmetik der völlig strengen Behandlung fähig. Eine solche bisweilen von hervorragenden Seiten vertretene Meinung halte ich für durchaus irrig; eine so einseitige Auslegung der Forderung der Strenge führt bald zu einer Ignorirung aller aus der Geometrie, Mechanik und Physik stammenden Begriffe, zu einer Unterbindung des Zuflusses von neuem Material aus der Außenwelt und schließlich sogar in letzter Consequenz zu einer Verwerfung der Begriffe des Continuums und der Irrationalzahl. Welch' wichtiger Lebensnerv aber würde der Mathematik abgeschnitten durch eine Exstirpation der Geometrie und der mathematischen Physik? Ich meine im Gegenteil, wo immer von erkenntnistheoretischer Seite oder in der Geometrie oder aus den

Theorien der Naturwissenschaft mathematische Begriffe auftauchen, erwächst der Mathematik die Aufgabe, die diesen Begriffen zu Grunde liegenden Principien zu erforschen und dieselben durch ein einfaches und vollständiges System von Axiomen derart festzulegen, daß die Schärfe der neuen Begriffe und ihre Verwendbarkeit zur Deduktion den alten arithmetischen Begriffen in keiner Hinsicht nachsteht.

Zu den neuen Begriffen gehören notwendig auch neue Zeichen; diese wählen wir derart, daß sie uns an die Erscheinungen erinnern, die der Anlaß waren zur Bildung der neuen Begriffe. So sind die geometrischen Figuren Zeichen für die Erinnerungsbilder der räumlichen Anschauung und finden als solche bei allen Mathematikern Verwendung. Wer benutzt nicht stets zugleich mit der Doppelungleichung $a > b > c$ für drei Größen a, b, c das Bild dreier hintereinander auf einer Geraden liegenden Punkte als das geometrische Zeichen des Begriffes „zwischen“. Wer bedient sich nicht der Zeichnung in einander gelagerter Strecken und Rechtecke, wenn es gilt einen schwierigen Satz über die Stetigkeit von Funktionen oder die Existenz von Verdichtungsstellen in voller Strenge zu beweisen. Wer könnte ohne die Figur des Dreiecks, des Kreises mit seinem Mittelpunkt, wer ohne das Kreuz dreier zueinander senkrechter Achsen auskommen? oder wer wollte auf die Vorstellung des Vektorfeldes oder das Bild einer Curven- und Flächenschaar mit ihrer Enveloppe verzichten, das in der Differentialgeometrie, in der Theorie der Differentialgleichungen, in der Begründung der Variationsrechnung und anderer rein mathematischer Wissenszweige eine so wichtige Rolle spielt?

Die arithmetischen Zeichen sind geschriebene Figuren und die geometrischen Figuren sind gezeichnete Formeln, und kein Mathematiker könnte diese gezeichneten Formeln entbehren, so wenig wie ihm beim Rechnen etwa das Formiren und Auflösen der Klammern oder die Verwendung anderer analytischer Zeichen entbehrlich sind.

Die Anwendung der geometrischen Zeichen als strenges Beweismittel setzt die genaue Kenntniß und völlige Beherrschung der Axiome voraus, die jenen Figuren zu Grunde liegen, und damit diese geometrischen Figuren dem allgemeinen Schatze mathematischer Zeichen einverleibt werden dürfen, ist daher eine strenge axiomatische Untersuchung ihres anschauungsmäßigen Inhaltes notwendig. Wie man beim Addiren zweier Zahlen die Ziffern nicht unrichtig untereinandersetzen darf, sondern vielmehr erst die Rechnungsregeln d. h. die Axiome der Arithmetik das richtige

Operiren mit den Ziffern bestimmen, so wird das Operiren mit den geometrischen Zeichen durch die Axiome der geometrischen Begriffe und deren Verknüpfung bestimmt.

Die Uebereinstimmung zwischen geometrischem und arithmetischem Denken zeigt sich auch darin, daß wir bei arithmetischen Forschungen ebensowenig wie bei geometrischen Betrachtungen in jedem Augenblicke die Kette der Denkoperationen bis auf die Axiome hin verfolgen; vielmehr wenden wir, zumal bei der ersten Inangriffnahme eines Problems, in der Arithmetik genau wie in der Geometrie zunächst ein rasches, unbewußtes, nicht definitiv sicheres Combiniren an, im Vertrauen auf ein gewisses arithmetisches Gefühl für die Wirkungsweise der arithmetischen Zeichen, ohne welches wir in der Arithmetik ebensowenig vorwärts kommen würden, wie in der Geometrie ohne die geometrische Einbildungskraft. Als Muster einer mit geometrischen Begriffen und Zeichen in strenger Weise operirenden arithmetischen Theorie nenne ich das Werk von Minkowski[1]) „Geometrie der Zahlen."

Es mögen noch einige Bemerkungen über die Schwierigkeiten, die mathematische Probleme bieten können und die Ueberwindung solcher Schwierigkeiten Platz finden.

Wenn uns die Beantwortung eines mathematischen Problems nicht gelingen will, so liegt häufig der Grund darin, daß wir noch nicht den allgemeineren Gesichtspunkt erkannt haben, von dem aus das vorgelegte Problem nur als einzelnes Glied einer Kette verwandter Probleme erscheint. Nach Auffindung dieses Gesichtspunktes wird häufig nicht nur das vorgelegte Problem unserer Erforschung zugänglicher, sondern wir gelangen so zugleich in den Besitz einer Methode, die auf die verwandten Probleme anwendbar ist. Als Beispiel diene die Einführung complexer Integrationswege in der Theorie der bestimmten Integrale durch Cauchy und die Aufstellung des Idealbegriffes in der Zahlentheorie durch Kummer. Dieser Weg zur Auffindung allgemeiner Methoden ist gewiß der gangbarste und sicherste; denn wer, ohne ein bestimmtes Problem vor Auge zu haben, nach Methoden sucht, dessen Suchen ist meist vergeblich.

Eine noch wichtigere Rolle als das Verallgemeinern spielt — wie ich glaube — bei der Beschäftigung mit mathematischen Problemen das Specialisiren. Vielleicht in den meisten Fällen, wo wir die Antwort auf eine Frage vergeblich suchen, liegt die Ursache des Mißlingens darin, daß wir einfachere und leichtere

---

1) Leipzig 1896.

Probleme als das vorgelegte noch nicht oder noch unvollkommen erledigt haben. Es kommt dann Alles darauf an, diese leichteren Probleme aufzufinden und ihre Lösung mit möglichst vollkommenen Hülfsmitteln und durch verallgemeinerungsfähige Begriffe zu bewerkstelligen. Diese Vorschrift ist einer der wichtigsten Hebel zur Ueberwindung mathematischer Schwierigkeiten und es scheint mir, daß man sich dieses Hebels meistens — wenn auch unbewußt — bedient.

Mitunter kommt es vor, daß wir die Beantwortung unter ungenügenden Voraussetzungen oder in unrichtigem Sinne erstreben und in Folge dessen nicht zum Ziele gelangen. Es entsteht dann die Aufgabe, die Unmöglichkeit der Lösung des Problems unter den gegebenen Voraussetzungen und in dem verlangten Sinne nachzuweisen. Solche Unmöglichkeitsbeweise wurden schon von den Alten geführt, indem sie z. B. zeigten, daß die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zur Kathete in einem irrationalen Verhältnisse steht. In der neueren Mathematik spielt die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen eine hervorragende Rolle und wir nehmen so gewahr, daß alte schwierige Probleme wie der Beweis des Parallelenaxioms, die Quadratur des Kreises oder die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades durch Wurzelziehen, wenn auch in anderem als dem ursprünglich gemeinten Sinne, dennoch eine völlig befriedigende und strenge Lösung gefunden haben.

Diese merkwürdige Thatsache neben anderen philosophischen Gründen ist es wohl, welche in uns eine Ueberzeugung entstehen läßt, die jeder Mathematiker gewiß teilt, die aber bis jetzt wenigstens niemand durch Beweise gestützt hat — ich meine die Ueberzeugung, daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß die Unmöglichkeit seiner Lösung und damit die Notwendigkeit des Mißlingens aller Versuche dargethan wird. Man lege sich irgend ein bestimmtes ungelöstes Problem vor, etwa die Frage nach der Irrationalität der Euler-Mascheronischen Constanten C oder die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen von der Form 2^n+1 giebt. So unzugänglich diese Probleme uns erscheinen und so ratlos wir zur Zeit ihnen gegenüber stehen — wir haben dennoch die sichere Ueberzeugung, daß ihre Lösung durch eine endliche Anzahl rein logischer Schlüsse gelingen muß.

Ist dieses Axiom von der Lösbarkeit eines jeden Problems eine dem mathematischen Denken allein charakteristische Eigen-

tümlichkeit oder ist es vielleicht ein allgemeines dem inneren Wesen unseres Verstandes anhaftendes Gesetz, daß alle Fragen, die er stellt, auch durch ihn einer Beantwortung fähig sind? Trifft man doch auch in anderen Wissenschaften alte Probleme an, die durch den Beweis der Unmöglichkeit in der befriedigendsten Weise und zum höchsten Nutzen der Wissenschaft erledigt worden sind. Ich erinnere an das Problem des Perpetuum mobile. Nach den vergeblichen Versuchen der Construktion eines Perpetuum mobile forschte man vielmehr nach den Beziehungen, die zwischen den Naturkräften bestehen müssen, wenn ein Perpetuum mobile unmöglich sein soll [1]), und diese umgekehrte Fragestellung führte auf die Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, das seinerseits die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile in dem ursprünglich verlangten Sinne erklärt.

Diese Ueberzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es kein Ignorabimus!

Unermeßlich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik, und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle zahllose neue Probleme auf. Gestatten Sie mir im Folgenden, gleichsam zur Probe, aus verschiedenen mathematischen Disciplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt.

Ueberblicken wir die Principien der Analysis und der Geometrie. Die anregendsten und bedeutendsten Ereignisse des letzten Jahrhunderts sind auf diesem Gebiete, wie mir scheint, die arithmetische Erfassung des Begriffs des Continuums in den Arbeiten von Cauchy, Bolzano, Cantor und die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Gauss, Bolyai, Lobatschefskiy. Ich lenke daher zunächst Ihre Aufmerksamkeit auf einige diesen Gebieten angehörenden Probleme.

---

1) Vgl. Helmholtz, Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. Vortrag, gehalten in Königsberg 1854.

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums.

Zwei Systeme, d. h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen (oder Punkten) heißen nach Cantor aequivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden können, daß einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untersuchungen von Cantor über solche Punktmengen machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch Niemanden gelungen ist; dieser Satz lautet:

Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen d. h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt)menge ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämmtlicher reellen Zahlen und mithin dem Continuum, d. h. etwa den Punkten einer Strecke aequivalent; *im Sinne der Aequivalenz giebt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Continuum.*

Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Continuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Continuum.

Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Irgend ein System von reellen Zahlen heißt geordnet, wenn von irgend zwei Zahlen des Systems festgesetzt ist, welches die frühere und welches die spätere sein soll, und dabei diese Festsetzung eine derartige ist, daß, wenn eine Zahl a früher als die Zahl b und b früher als c ist, so auch stets a früher als c erscheint. Die natürliche Anordnung der Zahlen eines Systems heiße diejenige, bei der die kleinere als die frühere, die größere als die spätere festgesetzt wird. Es giebt aber, wie leicht zu sehen ist, noch unendlich viele andere Arten, wie man die Zahlen eines Systems ordnen kann.

Wenn wir eine bestimmte Ordnung der Zahlen ins Auge fassen und aus denselben irgend ein besonderes System dieser Zahlen, ein sogenanntes Teilsystem oder eine Teilmenge, herausgreifen, so erscheint diese Teilmenge ebenfalls geordnet. Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisirt sind,

daß nicht nur in der Menge selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existirt. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet. Denn, wenn wir als Teilmenge die Punkte einer endlichen Strecke mit Ausnahme des Anfangspunktes der Strecke ins Auge fassen, so besitzt diese Teilmenge jedenfalls kein frühestes Element. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element hat, d. h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.

2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener elementaren Begriffe und jede Aussage innerhalb des Bereiches der Wissenschaft, deren Grundlagen wir prüfen, gilt uns nur dann als richtig, falls sie sich mittelst einer endlichen Anzahl logischer Schlüsse aus den aufgestellten Axiomen ableiten läßt. Bei näherer Betrachtung entsteht die Frage, *ob etwa gewisse Aussagen einzelner Axiome sich untereinander bedingen und ob nicht somit die Axiome noch gemeinsame Bestandteile enthalten, die man beseitigen muß, wenn man zu einem System von Axiomen gelangen will, die völlig von einander unabhängig sind.*

Vor Allem aber möchte ich unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome gestellt werden können, dies als das wichtigste Problem bezeichnen, *zu beweisen, daß dieselben untereinander widerspruchslos sind, d. h. daß man auf Grund derselben mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu Resultaten gelangen kann, die miteinander in Widerspruch stehen.*

In der Geometrie gelingt der Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome dadurch, daß man einen geeigneten Bereich

von Zahlen construirt, derart, daß den geometrischen Axiomen analoge Beziehungen zwischen den Zahlen dieses Bereiches entsprechen und daß demnach jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den geometrischen Axiomen auch in der Arithmetik jenes Zahlenbereiches erkennbar sein müßte. Auf diese Weise wird also der gewünschte Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome auf den Satz von der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zurückgeführt.

Zum Nachweise für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome bedarf es dagegen eines direkten Weges.

Die Axiome der Arithmetik sind im Wesentlichen nichts anderes als die bekannten Rechnungsgesetze mit Hinzunahme des Axiomes der Stetigkeit. Ich habe sie kürzlich zusammengestellt [1]) und dabei das Axiom der Stetigkeit durch zwei einfachere Axiome ersetzt, nämlich das bekannte Archimedische Axiom und ein neues Axiom des Inhaltes, daß die Zahlen ein System von Dingen bilden, welches bei Aufrechterhaltung der sämmtlichen übrigen Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist. (Axiom der Vollständigkeit). Ich bin nun überzeugt, daß es gelingen muß, einen direkten Beweis für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zu finden, wenn man die bekannten Schlußmethoden in der Theorie der Irrationalzahlen im Hinblick auf das bezeichnete Ziel genau durcharbeitet und in geeigneter Weise modificirt.

Um die Bedeutung des Problems noch nach einer anderen Rücksicht hin zu charakterisiren, möchte ich folgende Bemerkungen hinzufügen. Wenn man einem Begriffe Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriff existirt mathematisch nicht. So existirt z. B. mathematisch nicht eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Gelingt es jedoch zu beweisen, daß die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, daß damit die mathematische Existenz des Begriffes z. B. einer Zahl oder einer Function, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist. In dem vorliegenden Falle, wo es sich um die Axiome der reellen Zahlen in der Arithmetik handelt, ist der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome zugleich der Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder des Continuums. In der That, wenn der Nachweis für die Wider-

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180.

spruchslosigkeit der Axiome völlig gelungen sein wird, so verlieren die Bedenken, welche bisweilen gegen die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen gemacht worden sind, jede Berechtigung. Freilich der Inbegriff der reellen Zahlen, d. h. das Continuum ist bei der eben gekennzeichneten Auffassung nicht etwa die Gesammtheit aller möglichen Dezimalbruchentwicklungen oder die Gesammtheit aller möglichen Gesetze, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch die aufgestellten Axiome geregelt werden und für welche alle und nur diejenigen Thatsachen wahr sind, die durch eine endliche Anzahl logischer Schlüsse aus den Axiomen gefolgert werden können. Nur in diesem Sinne ist meiner Meinung nach der Begriff des Continuums streng logisch faßbar. Thatsächlich entspricht er auch, wie mir scheint, so am besten dem, was die Erfahrung und Anschauung uns giebt. Der Begriff des Continuums oder auch der Begriff des Systems aller Functionen existirt dann in genau demselben Sinne wie etwa das System der ganzen rationalen Zahlen oder auch wie die höheren Cantorschen Zahlklassen und Mächtigkeiten. Denn ich bin überzeugt, daß auch die Existenz der letzteren in dem von mir bezeichneten Sinne ebenso wie die des Continuums wird erwiesen werden können — im Gegensatz zu dem System aller Mächtigkeiten überhaupt oder auch aller Cantorschen Alephs, für welches, wie sich zeigen läßt, ein widerspruchloses System von Axiomen in meinem Sinne nicht aufgestellt werden kann und welches daher nach meiner Bezeichnungsweise ein mathematisch nicht existirender Begriff ist.

Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauss[1]) spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene

1) Werke, Bd. 8, S. 241 und 244.

vollkommen erledigt worden[1]; auch ist es Gerling[2]) gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in congruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, *zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist.*

4. Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte.

Eine andere Problemstellung, betreffend die Grundlagen der Geometrie ist diese. Wenn wir von den Axiomen, die zum Aufbau der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nötig sind, das Parallelenaxiom unterdrücken, bezüglich als nicht erfüllt annehmen, dagegen alle übrigen Axiome beibehalten, so gelangen wir bekanntlich zu der Lobatschefskijschen (hyperbolischen) Geometrie; wir dürfen daher sagen, daß diese Geometrie insofern eine der Euklidischen nächststehende Geometrie ist. Fordern wir weiter, daß dasjenige Axiom nicht erfüllt sein soll, wonach von drei Punkten einer Geraden stets einer und nur einer zwischen den beiden anderen liegt, so erhalten wir die Riemannsche (elliptische) Geometrie, so daß diese Geometrie als eine der Lobatschefskijschen nächststehende erscheint. Wollen wir eine ähnliche principielle Untersuchung über das Archimedische Axiom ausführen, so haben wir dieses als nicht erfüllt anzusehen und gelangen somit zu den Nicht-Archimedischen Geometrien, die von Veronese und mir untersucht worden sind. Die allgemeinere Frage, die sich nun erhebt, ist die, ob sich noch nach anderen fruchtbaren Gesichtspunkten Geometrien aufstellen lassen, die mit gleichem Recht der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehend sind, und da möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf einen Satz lenken, der von manchen Autoren sogar als Definition der geraden Linie hingestellt worden ist und der aussagt, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei

---

1) Vgl. außer der früheren Litteratur Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kapitel IV.

2) Gauss's Werke, Bd. 8, S. 242.

Punkten ist. Der wesentliche Inhalt dieser Aussage reduzirt sich auf den Satz von Euklid, daß im Dreiecke die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite ist, einen Satz, welcher wie man sieht, lediglich von elementaren d. h. aus den Axiomen unmittelbar entnommenen Begriffen handelt, und daher der logischen Untersuchung zugänglicher ist. Euklid hat den genannten Satz vom Dreieck mit Hülfe des Satzes vom Außenwinkel auf Grund der Congruenzsätze bewiesen. Man überzeugt sich nun leicht, daß der Beweis jenes Euklidischen Satzes allein auf Grund derjenigen Congruenzsätze, die sich auf das Abtragen von Strecken und Winkeln beziehen, nicht gelingt, sondern daß man zum Beweise eines Dreieckscongruenzsatzes bedarf. So entsteht die Frage nach einer Geometrie, in welcher alle Axiome der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und insbesondere alle Congruenzaxiome mit Ausnahme des einen Axioms von der Dreieckscongruenz (oder auch mit Ausnahme des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) gelten und in welcher überdies noch der Satz, daß in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, als besonderes Axiom aufgestellt wird.

Man findet, daß eine solche Geometrie thatsächlich existirt und keine andere ist als diejenige, welche Minkowski[1]) in seinem Buche „Geometrie der Zahlen“ aufgestellt und zur Grundlage seiner arithmetischen Untersuchungen gemacht hat. Die Minkowskische Geometrie ist also ebenfalls eine der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie nächststehende; sie ist im Wesentlichen durch folgende Festsetzungen charakterisirt: Erstens: Die Punkte, die von einem festen Punkt O gleichen Abstand haben, werden durch eine convexe geschlossene Fläche des gewöhnlichen Euklidischen Raumes mit O als Mittelpunkt repräsentirt. Zweitens: Zwei Strecken heißen auch dann einander gleich, wenn man sie durch Parallelverschiebung des Euklidischen Raumes ineinander überführen kann.

In der Minkowskischen Geometrie gilt das Parallelenaxiom; ich gelangte bei einer Betrachtung[2]), die ich über den Satz von der geraden Linie als kürzester Verbindung zweier Punkte anstellte, zu einer Geometrie, in welcher nicht das Parallelenaxiom gilt, während alle übrigen Axiome der Minkowskischen Geometrie erfüllt sind. Wegen der wichtigen Rolle, die der Satz

1) Leipzig 1896.

2) Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 91.

von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte und der im wesentlichen aequivalente Satz von Euklid über die Seiten eines Dreiecks nicht nur in der Zahlentheorie, sondern auch in der Theorie der Flächen und in der Variationsrechnung spielt, und da ich glaube, daß die eingehendere Untersuchung der Bedingungen für die Gültigkeit dieses Satzes ebenso auf den Begriff der Entfernung wie auch noch auf andere elementaren Begriffe z. B. den Begriff der Ebene und die Möglichkeit ihrer Definition mittelst des Begriffes der Geraden ein neues Licht werfen wird, so erscheint mir die *Aufstellung und systematische Behandlung der hier möglichen Geometrieen* wünschenswert.

Im Fall der Ebene und unter Zugrundelegung des Stetigkeitsaxioms führt das genannte Problem auf die von Darboux[1]) behandelte Frage, alle Variationsprobleme in der Ebene zu finden, für welche sämtliche Geraden der Ebene die Lösungen sind — eine Fragestellung, die mir weitgehender Verallgemeinerungen[2]) fähig und würdig erscheint.

5. Lie's Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differenzirbarkeit der die Gruppe definirenden Functionen.

Lie hat bekanntlich mit Hinzuziehung des Begriffs der continuirlichen Transformationsgruppe ein System von Axiomen für die Geometrie aufgestellt und auf Grund seiner Theorie der Transformationsgruppen bewiesen, daß dieses System von Axiomen zum Aufbau der Geometrie hinreicht. Da Lie jedoch bei Begründung seiner Theorie stets annimmt, daß die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, so bleibt in den Lieschen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Diese Ueberlegung, sowie auch gewisse Probleme hinsichtlich der arithmetischen Axiome legen uns die allgemeinere Frage nahe, *in wieweit der Liesche Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzirbarkeit der Functionen unserer Untersuchung zugänglich ist.*

Bekanntlich definirt Lie die endliche continuirliche Transformationsgruppe als ein System von Transformationen

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

1) Leçons sur la théorie générale des surfaces. Bd. 3, Paris 1894, S. 54.

2) Vgl. die interessanten Untersuchungen von A. Hirsch, Mathematische Annalen, Bd. 49 und 50.

von der Beschaffenheit, daß zwei beliebige Transformationen

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)$$
$$x''_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ b_1, \ldots, b_r)$$

des Systems, nacheinander ausgeführt, eine Transformation ergeben, welche wiederum dem System angehört und sich mithin in der Form

$$x''_i = f_i(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a);\ b_1, \ldots, b_r) = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ c_1, \ldots, c_r)$$

darstellen läßt, wo $c_1, \ldots, c_r$ gewisse Functionen von $a_1, \ldots, a_r$; $b_1, \ldots, b_r$ sind. Die Gruppeneigenschaft findet mithin ihren Ausdruck in einem System von Functionalgleichungen und erfordert an sich für die Functionen $f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_r$ keinerlei nähere Beschränkung. Doch die weitere Behandlungsweise jener Functionalgleichungen nach Lie, nämlich die Ableitung der bekannten grundlegenden Differentialgleichungen, setzt notwendig die Stetigkeit und Differenzirbarkeit der die Gruppe definirenden Functionen voraus.

Was zunächst die Stetigkeit betrifft, so wird man gewiß an dieser Forderung zunächst festhalten — schon im Hinblick auf die geometrischen und arithmetischen Anwendungen, bei denen die Stetigkeit der in Frage kommenden Functionen als eine Folge des Stetigkeitsaxioms erscheint. Dagegen enthält die Differenzirbarkeit der die Gruppe definirenden Functionen eine Forderung, die sich in den geometrischen Axiomen nur auf recht gezwungene und complicirte Weise zum Ausdruck bringen läßt, und es entsteht mithin die Frage, ob nicht etwa durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher und Parameter die Gruppe stets in eine solche übergeführt werden kann, für welche die definirenden Functionen differenzirbar sind, oder ob wenigstens unter Hinzufügung gewisser einfacher Annahmen eine Ueberführung in die der Lieschen Methode zugänglichen Gruppen möglich ist. Die Zurückführung auf analytische Gruppen ist nach einem von Lie[1]) aufgestellten und von Schur[2]) zuerst bewiesenen Satze stets dann möglich, sobald die Gruppe transitiv ist und die Existenz der ersten und gewisser zweiter Ableitungen der die Gruppe definirenden Functionen vorausgesetzt wird.

---

1) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 3, Leipzig 1893. § 82 und § 144.

2) Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen. Mathematische Annalen, Bd. 41.

Auch für unendliche Gruppen ist, wie ich glaube, die Untersuchung der entsprechenden Frage von Interesse. Ueberhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Functionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter der Voraussetzung der Differenzirbarkeit der auftretenden Functionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel[1]) mit so vielem Scharfsinn behandelten Functionalgleichungen, die Differenzengleichungen und andere in der Litteratur vorkommende Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differenzirbarkeit der auftretenden Functionen zwingt, und bei gewissen Existenzbeweisen in der Variationsrechnung fiel mir direkt die Aufgabe zu, aus dem Bestehen einer Differenzengleichung die Differenzirbarkeit der betrachteten Function beweisen zu müssen. In allen diesen Fällen erhebt sich daher die Frage, *inwieweit etwa die Aussagen, die wir im Falle der Annahme differenzirbarer Functionen machen können, unter geeigneten Modifikationen ohne diese Voraussetzung gültig sind.*

Bemerkt sei noch, daß H. Minkowski in seiner vorhin genannten „Geometrie der Zahlen“ von der Functionalungleichung

$$f(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \leqq f(x_1, \ldots, x_n)+f(y_1, \ldots, y_n)$$

ausgeht und aus dieser in der That die Existenz gewisser Differentialquotienten für die in Betracht kommenden Functionen zu beweisen vermag.

Andererseits hebe ich hervor, daß es sehr wohl analytische Functionalgleichungen giebt, deren einzige Lösungen nicht differenzirbare Functionen sind. Beispielsweise kann man eine eindeutige stetige nichtdifferenzirbare Function $\varphi(x)$ construiren, die die einzige Lösung zweier Functionalgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(x+\alpha)-\varphi(x) &= f(x), \\ \varphi(x+\beta)-\varphi(x) &= 0 \end{aligned}$$

darstellt, wo α, β zwei reelle Zahlen und $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x reguläre analytische eindeutige Function bedeutet. Man gelangt am einfachsten zu solchen Functionen mit Hülfe trigonometrischer Reihen durch einen ähnlichen Gedanken, wie ihn Borel nach einer jüngsten Mitteilung von Picard[2]) zur Construction einer doppelperiodischen nichtanalytischen Lösung einer gewissen analytischen partiellen Differentialgleichung benutzt hat.

1) Werke, Bd. 1 S. 1, 61, 389.

2) Quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Conférences faites à Clark-University. Revue générale des Sciences 1900. S. 22.

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik.

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*

Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1]) angeht, so scheint es mir wünschenswert, daß mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwickelung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speciell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.

Ueber die Grundlagen der Mechanik liegen von physikalischer Seite bedeutende Untersuchungen vor; ich weise hin auf die Schriften von Mach [2]), Hertz [3]), Boltzmann [4]) und Volkmann [5]); es ist daher sehr wünschenswert, wenn auch von den Mathematikern die Erörterung der Grundlagen der Mechanik aufgenommen würde. So regt uns beispielsweise das Boltzmannsche Buch über die Principe der Mechanik an, die dort angedeuteten Grenzprocesse, die von der atomistischen Auffassung zu den Gesetzen über die Bewegung der Continua führen, streng mathematisch zu begründen und durchzuführen. Umgekehrt könnte man die Bewegung über die Gesetze starrer Körper durch Grenzprocesse aus einem System von Axiomen abzuleiten suchen, die auf der Vorstellung von stetig veränderlichen, durch Parameter zu definirenden Zuständen eines den ganzen Raum stetig erfüllenden Stoffes beruhen — ist doch die Frage nach der Gleichberechtigung verschiedener Axiomensysteme stets von hohem principiellen Interesse.

Soll das Vorbild der Geometrie für die Behandlung der physikalischen Axiome maßgebend sein, so werden wir versuchen, zunächst durch eine geringe Anzahl von Axiomen eine möglichst allgemeine Klasse physikalischer Vorgänge zu umfassen und dann durch Adjunktion neuer Axiome der Reihe nach zu den specielleren Theorieen zu gelangen — wobei vielleicht ein Einteilungsprin-

---

1) Vgl. Bohlmann, Ueber Versicherungsmathematik 2te Vorlesung aus: Klein und Riecke, Ueber angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin 1900.

2) Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Leipzig, zweite Auflage. Leipzig 1889.

3) Die Principien der Mechanik, Leipzig 1894.

4) Vorlesungen über die Principe der Mechanik, Leipzig 1897.

5) Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig 1900.

cip aus der so tiefsinnigen Theorie der unendlichen Transformationsgruppen von Lie entnommen werden kann. Auch wird der Mathematiker, wie er es in der Geometrie gethan hat, nicht bloß die der Wirklichkeit nahe kommenden, sondern überhaupt alle logisch möglichen Theorien zu berücksichtigen haben und stets darauf bedacht sein, einen vollständigen Ueberblick über die Gesamtheit der Folgerungen zu gewinnen, die das gerade angenommene Axiomensystem nach sich zieht.

Ferner fällt dem Mathematiker in Ergänzung der physikalischen Betrachtungsweise die Aufgabe zu, jedes Mal genau zu prüfen, ob das neu adjungirte Axiom mit den früheren Axiomen nicht in Widerspruch steht. Der Physiker sieht sich oftmals durch die Ergebnisse seiner Experimente gezwungen, zwischendurch und während der Entwickelung seiner Theorie neue Annahmen zu machen, indem er sich betreffs der Widerspruchslosigkeit der neuen Annahmen mit den früheren Axiomen lediglich auf eben jene Experimente oder auf ein gewisses physikalisches Gefühl beruft — ein Verfahren, welches beim streng logischen Aufbau einer Theorie nicht statthaft ist. Der gewünschte Nachweis der Widerspruchslosigkeit aller gerade gemachten Annahmen erscheint mir auch deshalb von Wichtigkeit, weil das Bestreben, einen solchen Nachweis zu führen, uns stets am wirksamsten zu einer exakten Formulirung der Axiome selbst zwingt.

Wir haben bisher lediglich Fragen über die Grundlagen mathematischer Wissenszweige berücksichtigt. In der That ist die Beschäftigung mit den Grundlagen einer Wissenschaft von besonderem Reiz und es wird die Prüfung dieser Grundlagen stets zu den vornehmsten Aufgaben des Forschers gehören. „Das Endziel“ so hat Weierstrass einmal gesagt, „welches man stets im Auge behalten muß, besteht darin, daß man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche“ .... „Um überhaupt in die Wissenschaften einzudringen, ist freilich die Beschäftigung mit einzelnen Problemen unerläßlich.“ In der That bedarf es zur erfolgreichen Behandlung der Grundlagen einer Wissenschaft des eindringenden Verständnisses ihrer speziellen Theorien; nur der Baumeister ist im Stande, die Fundamente für ein Gebäude sicher anzulegen, der die Bestimmung des Gebäudes selbst im Einzelnen gründlich kennt. So wenden wir uns nunmehr zu speciellen Problemen einzelner Wissenszweige der Mathematik und berücksichtigen dabei zunächst die Arithmetik und die Algebra.

7. Irrationalität und Transcendenz bestimmter Zahlen.

Hermite's arithmetische Sätze über die Exponentialfunction und ihre Weiterführung durch Lindemann sind der Bewunderung aller mathematischer Generationen sicher. Aber zugleich erwächst uns die Aufgabe, auf dem betretenen Wege fortzuschreiten. Ich möchte daher eine Klasse von Problemen kennzeichnen, die meiner Meinung nach als die nächstliegenden hier in Angriff zu nehmen sind. Wenn wir von speciellen, in der Analysis wichtigen transcendenten Functionen erkennen, daß sie für gewisse algebraische Argumente algebraische Werte annehmen, so erscheint uns diese Thatsache stets als besonders merkwürdig und der eingehenden Untersuchung würdig. Wir erwarten eben von transcendenten Funktionen, daß sie für algebraische Argumente im Allgemeinen auch transcendente Werte annehmen, und obgleich uns wohl bekannt ist, daß es thatsächlich ganze transcendente Functionen giebt, die für alle algebraischen Argumente sogar rationale Werte besitzen, so werden wir es doch für höchst wahrscheinlich halten, daß z. B. die Exponentialfunction $e^{i\pi z}$ die offenbar für alle rationalen Argumente z stets algebraische Werte hat, andrerseits für alle irrationalen algebraischen Argumente z stets transcendente Zahlenwerte annimmt. Wir können dieser Aussage auch eine geometrische Einkleidung geben, wie folgt. *Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck das Verhältnis vom Basiswinkel zum Winkel an der Spitze algebraisch, aber nicht rational ist, so ist das Verhältnis zwischen Basis und Schenkel stets transcendent.* Trotz der Einfachheit dieser Aussage und der Aehnlichkeit mit den von Hermite und Lindemann gelösten Problemen halte ich doch den Beweis dieses Satzes für äußerst schwierig, ebenso wie etwa den Nachweis dafür, *daß die Potenz α^β für eine algebraische Basis α und einen algebraisch irrationalen Exponenten β, z. B. die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ oder $e^\pi = i^{-2i}$, stets eine transcendente oder auch nur eine irrationale Zahl darstellt.* Es ist gewiß, daß die Lösung dieser und ähnlicher Probleme uns zu ganz neuen Methoden und zu neuen Einblicken in das Wesen specieller irrationaler und transcendenter Zahlen führen muß.

8. Primzahlenprobleme.

In der Theorie der Verteilung der Primzahlen sind in neuerer Zeit durch Hadamard, de la Vallée Poussin, v. Mangoldt und Andere wesentliche Fortschritte gemacht worden. Zur vollständigen Lösung der Probleme, die uns die Riemannsche Ab-

handlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ gestellt hat, ist es jedoch noch nötig, die Richtigkeit der äußerst wichtigen Behauptung von Riemann *nachzuweisen, daß die Nullstellen der Function* $\zeta(s)$, die durch die Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

dargestellt wird, *sämtlich den reellen Bestandteil $\frac{1}{2}$ haben* — wenn man von den bekannten negativ ganzzahligen Nullstellen absieht. Sobald dieser Nachweis gelungen ist, so würde die weitere Aufgabe darin bestehen, die Riemannsche unendliche Reihe für die Anzahl der Primzahlen genauer zu prüfen und insbesondere *zu entscheiden, ob die Differenz zwischen der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer Größe x und dem Integrallogarithmus von x in der That von nicht höherer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung in x unendlich wird*, und ferner, ob dann die von den ersten complexen Nullstellen der Function $\zeta(s)$ abhängenden Glieder der Riemannschen Formel wirklich die stellenweise Verdichtung der Primzahlen bedingen, welche man bei den Zählungen der Primzahlen bemerkt hat.

Nach einer erschöpfenden Diskussion der Riemannschen Primzahlenformel wird man vielleicht dereinst in die Lage kommen, an die strenge Beantwortung des Problems von Goldbach [1]) zu gehen, ob jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist, ferner an die bekannte Frage, ob es unendlich viele Primzahlenpaare mit der Differenz 2 giebt oder gar an das allgemeinere Problem, ob die lineare Diophantische Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

mit gegebenen ganzzahligen paarweise teilerfremden Coefficienten a, b, c stets in Primzahlen x, y lösbar ist.

Aber von nicht geringerem Interesse und vielleicht von noch größerer Tragweite erscheint mir die Aufgabe, *die für die Verteilung der rationalen Primzahlen gewonnenen Resultate auf die Theorie der Verteilung der Primideale in einem gegebenen Zahlkörper k zu übertragen* — eine Aufgabe, die auf das Studium der dem Zahlkörper zugehörigen Function

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s}$$

---

1) Vgl. P. Stäckel: Ueber Goldbach's empirisches Theorem. Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1896 und Landau, ebenda 1900.

hinausläuft, wo die Summe über alle Ideale $\mathfrak{j}$ des gegebenen Zahlkörpers k zu erstrecken ist und $n(\mathfrak{j})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{j}$ bedeutet.

Ich nenne noch drei speciellere Probleme aus der Zahlentheorie, nämlich eines über die Reciprocitätsgesetze, eines über diophantische Gleichungen und ein drittes aus dem Gebiete der quadratischen Formen.

9. Beweis des allgemeinsten Reciprocitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper.

Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reciprocitätsgesetz der $l$ten Potenzreste bewiesen werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet und ferner, wenn l eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, sowie die wesentlichen Hülfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir entwickelte Theorie des Körpers der $l$ten Einheitswurzeln [1]) und meine Theorie[2]) des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer Diophantischen Gleichung.

Eine Diophantische Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlencoefficienten.

Unsere jetzige Kenntnis der Theorie der quadratischen Zahlkörper [3]) setzt uns in den Stand, *die Theorie der quadratischen*

---

1) Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Bd. IV, 1897. Fünfter Teil.

2) Mathematische Annalen, Bd. 51 und Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.

3) Hilbert, Ueber den Dirichletschen biquadratischen Zahlenkörper, Mathematische Annalen, Bd. 45; Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 und Mathematische Annalen. Bd. 51; Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Körper, Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898; Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, Kapitel VIII § 83.

Formen mit beliebig vielen Variabeln und beliebigen algebraischen Zahlencoefficienten erfolgreich in Angriff zu nehmen. Damit gelangen wir insbesondere zu der interessanten Aufgabe, eine vorgelegte quadratische Gleichung beliebig vieler Variabeln mit algebraischen Zahlencoefficienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Coefficienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind.

Den Uebergang zur Algebra und Functionentheorie möge das folgende wichtige Problem bilden.

12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über Abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich.

Von Kronecker rührt der Satz her, daß jeder Abelsche Zahlkörper im Bereich der rationalen Zahlen durch Zusammensetzung aus Körpern von Einheitswurzeln entsteht. Dieser fundamentale Satz aus der Theorie der ganzzahligen Gleichungen enthält zwei Aussagen, nämlich

erstens wird durch denselben die Frage nach der Anzahl und Existenz derjenigen Gleichungen beantwortet, die einen vorgeschriebenen Grad, eine vorgeschriebene Abelsche Gruppe und eine vorgeschriebene Diskriminante in Bezug auf den Bereich der rationalen Zahlen besitzen, und

zweitens wird behauptet, daß die Wurzeln solcher Gleichungen einen Bereich algebraischer Zahlen bilden, der genau mit demjenigen Bereiche übereinstimmt, den man erhält, wenn man in der Exponentialfunction $e^{i\pi z}$ für das Argument z der Reihe nach alle rationalen Zahlenwerte einträgt.

Die erste Aussage betrifft die Frage der Bestimmung gewisser algebraischer Zahlen durch ihre Gruppe und ihre Verzweigung; diese Frage entspricht also dem bekannten Problem der Bestimmung algebraischer Functionen zu gegebener Riemannscher Fläche. Die zweite Aussage liefert die verlangten Zahlen durch ein transcendentes Mittel, nämlich durch die Exponentialfunction $e^{i\pi z}$.

Da nächst dem Bereiche der rationalen Zahlen der Bereich der imaginären quadratischen Zahlkörper der einfachste ist, so entsteht die Aufgabe, den Kroneckerschen Satz auf diesen Fall auszudehnen. Kronecker selbst hat die Behauptung ausgesprochen, daß die Abelschen Gleichungen im Bereiche eines quadratischen Körpers durch die Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen mit singulären Moduln gegeben werden, so daß hiernach die elliptische Function die Rolle der Exponential-

function im vorigen Falle übernimmt. Der Beweis der Kroneckerschen Vermutung ist bisher nicht erbracht worden; doch glaube ich, daß derselbe auf Grund der von H. Weber[1]) entwickelten Theorie der complexen Multiplikation unter Hinzuziehung der von mir aufgestellten rein arithmetischen Sätze über Klassenkörper ohne erhebliche Schwierigkeit gelingen muß.

Von der höchsten Bedeutung endlich erscheint mir die Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes auf den Fall, *daß an Stelle des Bereichs der rationalen Zahlen oder des imaginären quadratischen Zahlenbereiches ein beliebiger algebraischer Zahlkörper als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt wird;* ich halte dies Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Functionentheorie.

Das Problem erweist sich von mannigfachen Seiten aus als zugänglich. Den wichtigsten Schlüssel zur Lösung des arithmetischen Teils dieses Problemes erblicke ich in dem allgemeinen Reciprocitätsgesetze der $l$ten Potenzreste innerhalb eines beliebig vorgelegten Zahlkörpers.

Was den functionentheoretischen Teil des Problems betrifft, so wird sich der Forscher auf diesem so anziehenden Gebiete durch die merkwürdigen Analogieen leiten lassen, die zwischen der Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Theorie der algebraischen Zahlen bemerkbar sind. Das Analogon zur Potenzreihenentwickelung einer algebraischen Function in der Theorie der algebraischen Zahlen hat Hensel[2]) aufgestellt und untersucht und das Analogon für den Riemann-Rochschen Satz hat Landsberg[3]) behandelt. Auch die Analogie zwischen dem Begriff des Geschlechts einer Riemannschen Fläche und dem Begriff der Klassenanzahl eines Zahlkörpers fällt ins Auge. Betrachten wir, um nur den einfachsten Fall zu berühren, eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ und andrerseits einen Zahlkörper von der Klassenanzahl $h = 2$, so entspricht dem Nachweise der Existenz eines überall endlichen Integrals auf der Riemannschen Fläche der Nachweis der Existenz einer ganzen Zahl α im Zahlkörper, die von solcher Art ist, daß die Zahl $\sqrt{\alpha}$ einen relativ unverzweigten quadratischen Körper in Bezug auf

---

1) Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891.

2) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VI, sowie eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit: „Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen."

3) Mathematische Annalen, Bd. 50. 1898.

den Grundkörper darstellt. In der Theorie der algebraischen Functionen dient bekanntlich zum Nachweise jenes Riemannschen Existenzsatzes die Methode der Randwertaufgabe; auch in der Theorie der Zahlkörper bietet der Nachweis der Existenz jener Zahl α gerade die meiste Schwierigkeit. Dieser Nachweis gelingt mit wesentlicher Hülfe des Satzes, daß es im Zahlkörper stets Primideale mit vorgeschriebenen Restcharakteren giebt; die letztere Thatsache ist also das zahlentheoretische Analogon zum Randwertproblem.

Die Gleichung des Abelschen Theorems in der Theorie der algebraischen Functionen sagt bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß die betreffenden Punkte der Riemannschen Fläche die Nullstellen einer algebraischen zur Fläche gehörigen Function sind; das genaue Analogon des Abelschen Theorems ist in der Theorie des Zahlkörpers von der Klassenanzahl $h = 2$ die Gleichung des quadratischen Reciprocitätsgesetzes[1])

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}}\right) = +1,$$

welche aussagt, daß das Ideal $\mathfrak{j}$ dann und nur dann ein Hauptideal des Zahlkörpers ist, wenn jene Zahl α in Bezug auf das Ideal $\mathfrak{j}$ einen positiven quadratischen Restcharakter besitzt.

Wie wir sehen, treten in dem eben gekennzeichneten Problem die drei grundlegenden Disciplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Functionentheorie in die innigste gegenseitige Berührung und ich bin sicher, daß insbesondere die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Variabelen eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, *diejenigen Functionen aufzufinden und zu diskutiren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunction für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunction für den imaginären quadratischen Zahlkörper.*

Wir kommen nun zur Algebra; ich nenne im Folgenden ein Problem aus der Gleichungstheorie und eines, auf welches mich die Theorie der algebraischen Invarianten geführt hat.

---

1) Vgl. Hilbert, Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898.

13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7ten Grades mittelst Functionen von nur 2 Argumenten.

Die Nomographie[1]) hat die Aufgabe Gleichungen mittelst gezeichneter Curvenschaaren zu lösen, die von einem willkürlichen Parameter abhängen. Man sieht sofort, daß jede Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten nur von zwei Parametern abhängen, d. h. jede Function von zwei unabhängigen Veränderlichen auf mannigfache Weise durch das der Nomographie zu Grunde liegende Princip darstellbar ist. Ferner sind durch dieses Princip offenbar auch eine große Klasse von Functionen von drei und mehr Veränderlichen darstellbar, nämlich alle diejenigen Functionen, die man dadurch erzeugen kann, daß man zunächst eine Function von zwei Argumenten bildet, dann jedes dieser Argumente wieder gleich Functionen von zwei Argumenten einsetzt, an deren Stelle wiederum Functionen von zwei Argumenten treten u. s. f., wobei eine beliebige endliche Anzahl von Einschachtelungen der Functionen zweier Argumente gestattet ist. So gehört beispielsweise jede rationale Function von beliebig vielen Argumenten zur Klasse dieser durch nomographische Tafeln construirbaren Functionen; denn sie kann durch die Prozesse der Addition, Subtraction, Multiplikation und Division erzeugt werden, und jeder dieser Prozesse repräsentirt eine Function von nur zwei Argumenten. Man sieht leicht ein, daß auch die Wurzeln aller Gleichungen, die in einem natürlichen Rationalitätsbereiche durch Wurzelziehen auflösbar sind, zu der genannten Klasse von Functionen gehören; denn hier kommt zu den vier elementaren Rechnungsoperationen nur noch der Prozeß des Wurzelziehens hinzu, der ja lediglich eine Function eines Argumentes repräsentirt. Desgleichen sind die allgemeinen Gleichungen 5ten und 6ten Grades durch geeignete nomographische Tafeln auflösbar; denn diese können durch solche Tschirnhausentransformationen, die ihrerseits nur Ausziehen von Wurzeln verlangen, in eine Form gebracht werden, deren Coefficienten nur von zwei Parametern abhängig sind.

Wahrscheinlich ist nun die Wurzel der Gleichung 7ten Grades eine solche Function ihrer Coefficienten, die nicht zu der genannten Klasse nomographisch construirbarer Functionen gehört, d. h. die sich nicht durch eine endliche Anzahl von Einschachtelungen von Functionen zweier Argumente erzeugen läßt. Um dieses einzusehen, wäre der Nachweis dafür nötig, *daß die Glei-*

1) M. d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris 1899.

chung 7ten Grades

$$f^7+xf^3+yf^2+zf+1 = 0$$

nicht mit Hülfe beliebiger stetiger Functionen von nur zwei Argumenten lösbar ist. Daß es überhaupt analytische Functionen von drei Argumenten x, y, z giebt, die nicht durch endlich-malige Verkettung von Functionen von nur zwei Argumenten erhalten werden können, davon habe ich mich, wie ich noch bemerken möchte, durch eine strenge Ueberlegung überzeugt.

14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Functionensysteme.

In der Theorie der algebraischen Invarianten verdienen, wie mir scheint, die Fragen nach der Endlichkeit voller Formensysteme ein besonderes Interesse. Es ist neuerdings L. Maurer[1]) gelungen, die von P. Gordan und mir bewiesenen Endlichkeitssätze der Invariantentheorie auf den Fall auszudehnen, daß nicht, wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie, die allgemeine projektive Gruppe, sondern eine beliebige Untergruppe der Definition der Invarianten zu Grunde gelegt wird.

Die Beschäftigung mit der Frage nach der Endlichkeit der Invarianten hat mich auf ein einfaches Problem geführt, welches jene Frage nach der Endlichkeit der Invarianten als besonderen Fall in sich enthält, und zu dessen Lösung wahrscheinlich eine erheblich feinere Ausbildung der Theorie der Elimination und der Kroneckerschen algebraischen Modulsysteme nötig ist, als sie bisher gelungen ist.

Es seien eine Anzahl m von ganzen rationalen Functionen $X_1, X_2, \ldots, X_m$ der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt:

$$(S) \qquad \begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ X_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Jede ganze rationale Verbindung von $X_1, \ldots, X_m$ wird offenbar durch Eintragung dieser Ausdrücke notwendig stets eine ganze rationale Function von $x_1, \ldots, x_n$. Es kann jedoch sehr wohl gebrochene rationale Functionen von $X_1, \ldots, X_m$ geben, die nach Ausführung jener Substitution (S) zu ganzen Functionen in $x_1, \ldots, x_n$ werden. Eine jede solche rationale Function von $X_1, \ldots, X_m$,

1) Vgl. Sitzungsberichte der K. Akademie der Wiss. zu München 1899 und eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

die nach Ausführung der Substitution (S) ganz in $x_1, \ldots x_n$ wird, möchte ich eine **relativganze** Function von $X_1, \ldots, X_m$ nennen. Jede ganze Function von $X_1, \ldots, X_m$ ist offenbar auch relativganz; ferner ist die Summe, die Differenz und das Product relativganzer Functionen stets wiederum relativganz.

Das entstehende Problem ist nun zu entscheiden, ob es stets möglich ist, *ein endliches System von relativganzen Functionen von $X_1, \ldots, X_m$ aufzufinden, durch die sich jede andere relativganze Function von $X_1, \ldots, X_m$ in ganzer rationaler Weise zusammensetzen läßt.* Wir können das Problem noch einfacher formuliren, wenn wir den Begriff **des endlichen Integritätsbereiches** einführen. Unter einem endlichen Integritätsbereiche möchte ich ein solches System von Functionen verstehen, aus welchem sich eine endliche Anzahl von Functionen auswählen läßt, mit deren Hülfe alle übrigen Functionen des Systems in ganzer rationaler Weise ausdrückbar sind. Unser Problem läuft dann darauf hinaus, zu zeigen, daß die sämtlichen relativganzen Functionen eines beliebigen Rationalitätsbereiches stets einen endlichen Integritätsbereich bilden.

Es liegt auch nahe, das Problem *zahlentheoretisch zu verfeinern*, indem man die Coefficienten der gegebenen Functionen $f_1, \ldots, f_m$ als ganze rationale Zahlen annimmt und unter den relativganzen Functionen von $X_1, \ldots, X_m$ nur solche rationalen Functionen dieser Argumente versteht, die nach Ausführung jener Substitution (S) ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzen rationalen Coefficienten werden.

Ein besonderer einfacher Fall dieses verfeinerten Problems ist der folgende: Gegeben seien m ganze rationale Functionen $X_1, \ldots, X_m$ der einen Veränderlichen x mit ganzen rationalen Coefficienten und ferner eine Primzahl p. Man betrachte das System derjenigen ganzen rationalen Functionen von x, welche sich in der Gestalt

$$\frac{G(X_1, \ldots, X_m)}{p^h}$$

darstellen lassen, wo G eine ganze rationale Function der Argumente $X_1, \ldots, X_m$ und p^h irgend eine Potenz der Primzahl p ist. Frühere Untersuchungen von mir [1]) zeigen dann unmittelbar, daß alle solchen Ausdrücke bei bestimmtem Exponenten h einen endlichen Integritätsbereich bilden; die Frage ist aber hier, ob das Gleiche auch für alle Exponenten h zugleich gilt, d. h. ob sich eine

1) Mathematische Annalen, Bd. 36 S. 485.

endliche Anzahl von solchen Ausdrücken auswählen läßt, durch die jeder andere Ausdruck von jener Gestalt für irgend einen Exponenten h ganz und rational darstellbar ist.

Aus den Grenzgebieten zwischen Algebra und Geometrie möchte ich zwei Probleme nennen: das eine betrifft den geometrischen Abzählungskalkül und das zweite die Topologie algebraischer Curven und Flächen.

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül.

Das Problem besteht darin, *diejenigen geometrischen Anzahlen strenge und unter genauer Feststellung der Grenzen ihrer Gültigkeit zu beweisen, die insbesondere Schubert*[1]) *auf Grund des sogenannten Princips der speciellen Lage mittelst des von ihm ausgebildeten Abzählungskalküls bestimmt hat.* Wenn auch die heutige Algebra die Durchführbarkeit der Eliminationsprocesse im Princip gewährleistet, so ist zum Beweise der Sätze der abzählenden Geometrie erheblich mehr erforderlich, nämlich die Durchführung der Elimination bei besonders geformten Gleichungen in der Weise, daß der Grad der Endgleichungen und die Vielfachheit ihrer Lösungen sich voraussehen läßt.

16. Problem der Topologie algebraischer Curven und Flächen.

Die Maximalzahl der geschlossenen und getrennt liegenden Züge, welche eine ebene algebraische Curve $n$ter Ordnung haben kann, ist von Harnack[2]) bestimmt worden; es entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Lage der Curvenzüge in der Ebene. Was die Curven 6ter Ordnung angeht, so habe ich mich — freilich auf einem recht umständlichen Wege — davon überzeugt, daß die 11 Züge, die sie nach Harnack haben kann, keinesfalls sämtlich außerhalb von einander verlaufen dürfen, sondern daß ein Zug existiren muß, in dessen Innerem ein Zug und in dessen Aeußerem neun Züge verlaufen oder umgekehrt. *Eine gründliche Untersuchung der gegenseitigen Lage bei der Maximalzahl von getrennten Zügen scheint mir ebenso sehr von Interesse zu sein, wie die entsprechende Untersuchung über die Anzahl, Gestalt und Lage der Mäntel einer algebraischen Fläche im Raume* — ist doch bisher noch nicht einmal bekannt, wieviel Mäntel eine Fläche 4ter

1) Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879.

2) Mathematische Annalen, Bd. 10.

Ordnung des dreidimensionalen Raumes im Maximum wirklich besitzt [1]).

Im Anschluß an dieses rein algebraische Problem möchte ich eine Frage aufwerfen, die sich, wie mir scheint, mittelst der nämlichen Methode der continuirlichen Coefficientenänderung in Angriff nehmen läßt, und deren Beantwortung für die Topologie der durch Differentialgleichungen definirten Curvenschaaren von entsprechender Bedeutung ist — nämlich die Frage nach *der Maximalzahl und Lage der Poincaréschen Grenzcykeln (cycles limites) für eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades* von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

wo X, Y ganze rationale Funktionen $n$ten Grades in x, y sind, oder in homogener Schreibweise

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z ganze rationale homogene Functionen $n$ten Grades von x, y, z bedeuten und diese als Funktionen des Parameters t zu bestimmen sind.

17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate.

Definit heißt eine solche ganze rationale Funktion oder Form beliebig vieler Veränderlichen mit reellen Coefficienten, die für keine reellen Werte dieser Veränderlichen negativ ausfällt. Das System aller definiten Funktionen verhält sich invariant gegenüber den Operationen der Addition und der Multiplikation; aber auch der Quotient zweier definiten Funktionen ist — sofern er eine ganze Funktion der Veränderlichen wird — eine definite Form. Das Quadrat einer jeden beliebigen Form ist offenbar stets eine definite Form; da aber, wie ich gezeigt habe [2]), nicht jede definite Form durch Addition aus Formenquadraten zusammengesetzt werden kann, so entsteht die Frage — die ich für den Fall ternärer Formen in bejahendem Sinne entschieden habe [3]) —, *ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann.* Zugleich ist es für gewisse

1) Vgl. Rohn, Flächen vierter Ordnung, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886.

2) Mathematische Annalen Bd. 32.

3) Acta mathematica Bd. 17.

Fragen hinsichtlich der Möglichkeit gewisser geometrischer Construktionen wünschenswert, zu wissen, ob die Coefficienten der bei der Darstellung zu verwendenden Formen stets in demjenigen Rationalitätsbereiche angenommen werden dürfen, der durch die Coefficienten der dargestellten Form gegeben ist [1]).

Ich nenne noch eine geometrische Aufgabe.

18. Aufbau des Raumes aus congruenten Polyedern.

Wenn man nach denjenigen Gruppen von Bewegungen in der Ebene fragt, für die ein Fundamentalbereich existirt, so fällt bekanntlich die Antwort sehr verschieden aus, jenachdem die betrachtete Ebene die Riemannsche (elliptische), Euklidische oder Lobatschefskiysche (hyperbolische) ist. Im Falle der elliptischen Ebene giebt es eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen und es reicht eine endliche Anzahl von Exemplaren congruenter Bereiche zur lückenlosen Ueberdeckung der ganzen Ebene aus: die Gruppe besteht eben nur aus einer endlichen Anzahl von Bewegungen. Im Falle der hyperbolischen Ebene giebt es eine unendliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Fundamentalbereichen, nämlich die bekannten Poincaréschen Polygone; zur lückenlosen Ueberdeckung der Ebene ist eine unendliche Anzahl von Exemplaren congruenter Bereiche notwendig. Der Fall der Euklidischen Ebene steht in der Mitte; denn in diesem Falle giebt es nur eine endliche Anzahl von wesentlich verschiedenen Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich; aber zur lückenlosen Ueberdeckung der ganzen Eebene ist eine unendliche Anzahl von Exemplaren congruenter Bereiche notwendig.

Genau die entsprechenden Thatsachen gelten auch im dreidimensionalen Raume. Die Thatsache der Endlichkeit der Bewegungsgruppen im elliptischen Raume ist eine unmittelbare Folge eines fundamentalen Satzes von C. Jordan [2]), wonach die Anzahl der wesentlich verschiedenen Arten von endlichen Gruppen linearer Substitutionen mit n Veränderlichen eine gewisse endliche, von n abhängige Grenze nicht überschreitet. Die Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich im hyperbolischen Raume sind von Fricke und Klein in den Vorlesungen über die Theorie

1) Vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, Kap. VII, insbesondere § 38.

2) Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878) und Atti della Reale Accademia di Napoli 1880.

der automorphen Funktionen[1]) untersucht worden und endlich haben Fedorow[2]), Schoenflies[3]) und neuerdings Rohn[4]) den Beweis dafür erbracht, daß es im Euklidischen Raume nur eine endliche Zahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt. Während nun die den elliptischen und hyperbolischen Raum betreffenden Resultate und Beweismethoden unmittelbar auch für den n-dimensionalen Raum Geltung haben, so scheint die Verallgemeinerung des den Euklidischen Raum betreffenden Satzes erhebliche Schwierigkeiten zu bieten und es ist daher die Untersuchung der Frage wünschenswert, ob *es auch im n-dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich giebt.*

Ein Fundamentalbereich einer jeden Bewegungsgruppe zusammen mit den congruenten aus der Gruppe entspringenden Bereichen liefert offenbar eine lückenlose Ueberdeckung des Raumes. Es erhebt sich die Frage, ob ferner auch *solche Polyeder existiren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten und mittelst derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung congruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist.* Ich weise auf die hiermit in Zusammenhang stehende, für die Zahlentheorie wichtige und vielleicht auch der Physik und Chemie einmal Nutzen bringende Frage hin, wie man unendlich viele Körper von der gleichen vorgeschriebenen Gestalt, etwa Kugeln mit gegebenem Radius oder reguläre Tetraeter mit gegebener Kante (bez. in vorgeschriebener Stellung) im Raume am dichtesten einbetten, d. h. so lagern kann, daß das Verhältnis des erfüllten Raumes zum nichterfüllten Raume möglichst groß ausfällt.

Ueberblicken wir die Entwickelung der Theorie der Functionen im letzten Jahrhundert, so bemerken wir vor Allem die fundamentale Rolle derjenigen Klasse von Functionen, die wir heute als analytische Functionen bezeichnen — eine Klasse von Functionen, die wohl dauernd im Mittelpunkt des mathematischen Interesses stehen wird.

Wir könnten nach sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus der Fülle aller denkbaren Functionen umfassende Klassen heraus-

1) Leipzig 1897. Vgl. insbesondere Abschnitt I, Kap. 2—3.
2) Symmetrie der regelmäßigen Systeme von Figuren 1890.
3) Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891.
4) Mathematische Annalen Bd. 53.

heben, die einer besonders eingehenden Untersuchung würdig sind. Betrachten wir beispielsweise die Klasse derjenigen Functionen, die sich durch gewöhnliche oder partielle algebraische Differentialgleichungen charakterisiren lassen. In dieser Klasse von Functionen kommen, wie wir sofort bemerken, gerade solche Functionen nicht vor, die aus der Zahlentheorie stammen und deren Erforschung für uns von höchster Wichtigkeit ist. Beispielsweise genügt die schon früher erwähnte Function $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differentialgleichung, wie man leicht mit Hülfe der bekannten Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ erkennen kann, wenn man den von Hölder[1]) bewiesenen Satz benutzt, daß die Function $\Gamma(x)$ keine algebraische Differentialgleichung befriedigt. Ferner genügt die durch die unendliche Reihe

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \cdots$$

definirte Function der beiden Veränderlichen s und x, die mit jener Function $\zeta(s)$ in enger Beziehung steht, wahrscheinlich keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung; bei der Untersuchung dieser Frage wird man die Functionalgleichung zu benutzen haben:

$$x \frac{\partial \zeta(s, x)}{\partial x} = \zeta(s-1, x).$$

Wenn wir andrerseits, was aus arithmetischen und geometrischen Gründen nahe liegt, die Klasse aller derjenigen Functionen betrachten, welche stetig und unbegrenzt differenzirbar sind, so würden wir bei deren Untersuchung auf das gefügige Werkzeug der Potenzreihe und auf den Umstand verzichten müssen, daß die Function durch die Wertezuordnung in jedem beliebig kleinen Gebiet völlig bestimmt ist. Während also die vorige Abgrenzung des Functionsgebietes zu eng war, erscheint uns diese als zu weit.

Der Begriff der analytischen Function dagegen nimmt in sich den ganzen Reichtum der für die Wissenschaft wichtigsten Functionen auf, mögen sie aus der Zahlentheorie, aus der Theorie der Differentialgleichungen oder der algebraischen Functionalgleichungen, mögen sie aus der Geometrie oder der mathematischen Physik stammen; und so führt mit Recht die analytische Function im Reiche der Functionen die unbedingte Herrschaft.

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 28.

19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?

Eine der begrifflich merkwürdigsten Thatsachen in den Elementen der Theorie der analytischen Functionen erblicke ich darin, daß es partielle Differentialgleichungen giebt, deren Integrale sämtlich notwendig analytische Functionen der unabhängigen Variabeln sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind. Die bekanntesten partiellen Differentialgleichungen dieser Art sind die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

und gewisse von Picard[1]) untersuchte lineare Differentialgleichungen, ferner die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche und andere. Die Mehrzahl dieser partiellen Differentialgleichungen haben als Merkmal miteinander gemein, daß sie die Lagrangeschen Differentialgleichungen gewisser Variationsprobleme sind und zwar solcher Variationsprobleme

$$\iint F(p, q, z; x, y)\, dx\, dy = \text{Minimum}, \qquad \left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

bei denen für alle in Frage kommenden Argumente die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\right)^2 > 0$$

gilt, während F selbst eine analytische Function ist. Wir wollen ein solches Variationsproblem ein reguläres Variationsproblem nennen. Die regulären Variationsprobleme sind es vornehmlich, die in der Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik eine Rolle spielen, und es liegt die Frage nahe, ob alle Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytische Functionen sein müssen, *d. h. ob jede Lagrangesche partielle Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems die Eigenschaft hat, daß sie nur analytische Integrale zuläßt* — selbst wenn man, wie bei dem Dirichletschen Potentialprobleme, der Function irgend welche stetige, aber nicht analytische Randwerte aufzwingt.

1) Journal de l'École Polytechnique 1890.

Ich bemerke noch, daß es beispielsweise Flächen von negativer constanter Gaussscher Krümmung giebt, die durch stetige und fortgesetzt differenzirbare, aber nicht analytische Functionen dargestellt werden, während wahrscheinlich jede Fläche von positiver constanter Gaussscher Krümmung stets notwendig eine analytische Fläche sein muß. Bekanntlich stehen ja auch die Flächen positiver constanter Krümmung in engster Verbindung mit dem regulären Variationsproblem, durch eine geschlossene Raumcurve eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes zu legen, die mit einer festen Fläche durch die nämliche Raumcurve ein gegebenes Volumen abschließt.

20. Allgemeines Randwertproblem.

Ein wichtiges Problem, welches mit dem eben genannten in engem Zusammenhange steht, ist die Frage nach der Existenz von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen mit vorgeschriebenen Randwerten. Die scharfsinnigen Methoden von H. A. Schwarz, C. Neumann und Poincaré haben dieses Problem für die Differentialgleichung des Potentials im Wesentlichen gelöst, doch erscheinen diese Methoden im Allgemeinen nicht unmittelbar der Ausdehnung fähig auf den Fall, indem am Rande die Differentialquotienten oder Beziehungen zwischen diesen und den Werten der Function vorgeschrieben sind, oder wenn es sich nicht um Potentialflächen handelt, sondern etwa nach Flächen kleinsten Flächeninhalts oder nach Flächen mit constanter positiver Gaussscher Krümmung gefragt wird, die durch eine vorgelegte Raumcurve hindurch laufen oder über eine gegebene Ringfläche zu spannen sind. Ich bin überzeugt, daß es möglich sein wird, diese Existenzbeweise durch einen allgemeinen Grundgedanken zu führen, auf den das Dirichletsche Princip hinweist und der uns dann vielleicht in den Stand setzen wird, der Frage näher zu treten, *ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der gegebenen Grenzbedingungen gewisse Annahmen* — etwa die Stetigkeit und stückweise öftere Differenziirbarkeit, der für die Randbedingungen maßgebenden Functionen — *erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt* [1]).

21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen z möchte ich auf ein wichtiges

1) Vgl. meinen Vortrag über das Dirichletsche Princip. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VIII 1900, S. 184.

Problem hinweisen, welches wohl bereits Riemann im Sinne gehabt hat, und welches darin besteht, zu zeigen, daß es stets *eine lineare Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit gegebenen singulären Stellen und einer gegebenen Monodromiegruppe giebt.* Die Aufgabe verlangt also die Auffindung von n Functionen der Variabeln z, die sich überall in der complexen z-Ebene regulär verhalten, außer etwa in den gegebenen singulären Stellen: in diesen dürfen sie nur von endlich hoher Ordnung unendlich werden und beim Umlauf der Variabeln z um dieselben erfahren sie die gegebenen linearen Substitutionen. Die Existenz solcher Differentialgleichungen ist durch Constantenzählung wahrscheinlich gemacht worden, doch gelang der strenge Beweis bisher nur in dem besonderen Falle, wo die Wurzeln der Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen sämtlich vom absoluten Betrage 1 sind. Diesen Beweis hat L. Schlesinger[1]) auf Grund der Poincaréschen Theorie der Fuchsschen ζ-Functionen erbracht. Es würde offenbar die Theorie der linearen Differentialgleichungen ein wesentlich abgeschlosseneres Bild zeigen, wenn die allgemeine Erledigung des bezeichneten Problems gelänge.

22. Uniformisirung analytischer Beziehungen mittelst automorpher Functionen.

Wie Poincaré zuerst bewiesen hat, gelingt die Uniformisirung einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen zwei Variabeln stets durch automorphe Functionen einer Variabeln; d. h. wenn eine beliebige algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln vorgelegt ist, so lassen sich für dieselben stets solche eindeutigen automorphen Functionen einer Variabeln finden, nach deren Einsetzung die algebraische Gleichung identisch in dieser Variabeln erfüllt ist. Die Verallgemeinerung dieses fundamentalen Satzes auf nicht algebraische, sondern beliebige analytische Beziehungen zwischen zwei Variabeln hat Poincaré[2]) ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen und zwar auf einem völlig anderen Wege als derjenige war, der ihn bei dem anfangs genannten speciellen Probleme zum Ziele führte. Aus Poincarés Beweis für die Möglichkeit der Uniformisirung einer beliebigen analytischen Beziehung zwischen zwei Variabeln geht jedoch noch nicht hervor, ob es möglich ist, die eindeutigen Functionen der neuen Variabeln so zu wählen, daß, während diese Variabele das re-

1) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2, Teil 2 No. 366.

2) Bulletin de la Société Mathématique de France XI. 1883.

guläre Gebiet jener Functionen durchläuft, auch wirklich die Gesamtheit aller regulären Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes zur Darstellung gelangt. Vielmehr scheinen in Poincarés Untersuchungen, abgesehen von den Verzweigungspunkten, noch gewisse andere im Allgemeinen unendlichviele diskrete Stellen vorgelegten analytischen Gebildes ausgenommen zu sein, zu denen man nur gelangt, indem man die neue Variable gewissen Grenzstellen der Functionen nähert. *Eine Klärung und Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in Anbetracht der fundamentalen Bedeutung der Poincaréschen Fragestellung äußerst wünschenswert.*

Im Anschluß an dieses Problem bietet sich das Problem der Uniformisirung einer algebraischen oder beliebigen analytischen Beziehung zwischen drei oder mehr complexen Veränderlichen — ein Problem, das bekanntlich in zahlreichen besonderen Fällen lösbar ist, und für welches die neueren Untersuchungen von Picard über algebraische Functionen von zwei Variabeln als willkommene und bedeutsame Vorarbeiten in Anspruch zu nehmen sind.

23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung.

Bisher habe ich im Allgemeinen möglichst bestimmte und specielle Probleme genannt, in der Erwägung, daß es gerade die bestimmten und speciellen Probleme sind, die uns am meisten anziehen und von denen oft der nachhaltigste Einfluß auf die Gesamtwissenschaft ausgeht. Dennoch möchte ich mit einem allgemeinen Probleme schließen, nämlich mit dem Hinweise auf eine Disciplin, die bereits mehrmals in meinem Vortrage Erwähnung fand — eine Disciplin, die trotz der erheblichen Förderung, die sie in neuerer Zeit durch Weierstrass erfahren hat, dennoch nicht die allgemeine Schätzung genießt, die ihr meiner Ansicht nach zukommt — ich meine die *Variationsrechnung* [1]).

Die Variationsrechnung im weitesten Sinne ist die Lehre vom Variiren der Functionen und erscheint uns als solche wie eine denknotwendige Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. So aufgefaßt, bilden beispielsweise die Poincaréschen Untersuchungen über das Dreikörperproblem ein Kapitel der Variationsrechnung, insofern darin Poincaré aus bekannten Bahncurven von gewisser Beschaffenheit durch das Princip des Variirens neue Bahncurven von ähnlicher Beschaffenheit ableitet.

---

1) Lehrbücher sind: Moigno-Lindelöf „Leçons du calcul des variations", Paris 1861 und A. Kneser, „Lehrbuch der Variationsrechnung", Braunschweig 1900.

Den am Anfange meines Vortrags gemachten allgemeinen Bemerkungen über Variationsrechnung füge ich hier eine kurze Begründung hinzu.

Das einfachste Problem der eigentlichen Variationsrechnung besteht bekanntlich darin, eine Funktion y der Veränderlichen x derart zu finden, daß das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)\,dx, \qquad \left[y_x = \frac{dy}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt y andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten in das bestimmte Integral einsetzen. Das Verschwinden der ersten Variation im üblichen Sinne

$$\delta J = 0$$

liefert für die gesuchte Funktion y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

(1) $$\frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0, \qquad \left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x},\quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right].$$

Um nun des Näheren die notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten des verlangten Minimums zu untersuchen, betrachten wir das Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p) F_p\}\,dx$$

$$\left[F = F(p, y; x),\quad F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right]$$

und fragen, wie darin p als Funktion von x, y zu nehmen ist, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege d. h. von der Wahl der Funktion y der Variabeln x unabhängig wird. Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int_a \{A y_x - B\}\,dx,$$

wo A und B nicht y_x enthalten, und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

d. h. wir erhalten für die Funktion p der beiden Veränderlichen x, y die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0.$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und die ebengefundene partielle Differentialgleichung (1*) stehen zu einander in engster Beziehung. Diese Beziehung wird uns unmittelbar deutlich durch die folgende einfache Umformung:

$$\begin{aligned}\delta J^* &= \int_a^b \{F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p) F_p + (y_x - p)\delta F_p\}\, dx\\ &= \int_a^b \{F_y \delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\delta F_p\}\, dx\\ &= \delta J + \int_a^b (y_x - p)\,\delta F_p\, dx.\end{aligned}$$

Wir entnehmen nämlich hieraus folgende Thatsachen: wenn wir uns irgend eine einfache Schaar von Integralcurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) verschaffen und dann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad y_x = p(x, y)$$

bilden, die diese Integralcurven ebenfalls als Lösungen zuläßt, so ist stets die Funktion $p(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*); und umgekehrt, wenn $p(x, y)$ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) bedeutet, so sind die sämtlichen nicht singulären Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (2) zugleich Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1); oder kurz ausgedrückt: wenn $y_x = p(x, y)$ eine Integralgleichung erster Ordnung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) ist, so stellt $p(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung (1*) dar und umgekehrt; die Integralcurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) sind also zugleich die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichnng erster Ordnung (1*).

In dem vorliegenden Falle finden wir das nämliche Resultat auch mittelst einer einfachen Rechnung; diese liefert uns nämlich die in Rede stehenden Differentialgleichungen (1) bez. (1*) in

der Gestalt

$$(1) \qquad y_{xx} F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0$$

bez.

$$(1^*) \qquad (p_x + p p_y) F_{pp} + p F_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

wo die unteren Indices in leichtverständlicher Schreibweise die partiellen Ableitungen nach x, y, p, y_x bedeuten. Hieraus leuchtet die Richtigkeit der behaupteten Beziehung ein.

Die vorhin aufgestellte und soeben bewiesene enge Beziehung zwischen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) ist, wie mir scheint, für die Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung. Denn wegen der Unabhängigkeit des Integrales J^* vom Integrationswege folgt nunmehr

$$(3) \qquad \int_a^b \{F(p) + (y_x - p) F_p(p)\} dx = \int_a^b F(\bar{y}_x) dx,$$

wenn wir das Integral linker Hand auf irgend einem Wege y und das Integral rechter Hand auf einer Integralcurve $\bar{y}$ der Differentialgleichung

$$\bar{y}_x = p(x, \bar{y})$$

genommen denken. Mit Hülfe der Gleichung (3) gelangen wir zu der Weierstrass'schen Formel

$$(4) \qquad \int_a^b F(y_x) dx - \int_a^b F(\bar{y}_x) dx = \int_a^b E(y_x, p) dx$$

wo E den von den 4 Argumenten y_x, p, y, x abhängigen Weierstrass'schen Ausdruck

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p) F_p(p)$$

bezeichnet. Da es hiernach lediglich darauf ankommt, die in Rede stehende Integralcurve $\bar{y}$ in der xy-Ebene auf eindeutige und stetige Weise mit Werten einer entsprechenden Integralfunktion $p(x, y)$ zu umgeben, so führen die eben angedeuteten Entwickelungen unmittelbar — ohne Heranziehung der zweiten Variation sondern allein durch Anwendung des Polarenprocesses auf die Differentialgleichung (1) — zur Aufstellung der Jacobi'schen Bedingung und zur Beantwortung der Frage, inwiefern diese Jacobi'sche Bedingung im Verein mit der Weierstrass'schen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Die angedeuteten Entwickelungen lassen sich, ohne daß eine weitere Rechnung nötig wäre, auf den Fall zweier oder mehr gesuchter Funktionen, sowie auf den Fall eines Doppel- oder mehrfachen Integrals übertragen. So liefert beispielsweise im Fall des über ein gegebenes Gebiet ω zu erstreckenden Doppelintegrals

$$J = \int F(z_x, z_y, z; x, y)\, d\omega \qquad \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

das im üblichen Sinne zu verstehende Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J = 0$$

für die gesuchte Funktion z von x, y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1)\quad \frac{dF_{z_x}}{dx} + \frac{dF_{z_y}}{dy} - F_z = 0. \quad \left[F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x},\quad F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y},\quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}\right].$$

Andererseits betrachten wir das Integral

$$J^* = \int \{F + (z_x - p) F_p + (z_y - q) F_q\}\, d\omega,$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y),\quad F_p = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial p},\quad F_q = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial q}\right]$$

und fragen, wie darin p und q als Funktionen von x, y, z zu nehmen sind, damit der Wert dieses Integrals von der Wahl der durch die gegebene geschlossene Raumcurve gelegten Fläche d. h. von der Wahl der Funktion z der Variabeln x, y unabhängig wird. Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int \{A z_x + B z_y - C\}\, d\omega$$

und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

d. h. wir erhalten für die Funktionen p und q der drei Variabeln x, y, z die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\mathrm{I}^*)\qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0.$$

Fügen wir zu dieser Differentialgleichung noch die aus den Gleichungen

$$z_x = p(x, y, z), \quad z_y = q(x, y, z)$$

resultirende partielle Differentialgleichung

$$(I^*) \qquad p_y + q p_z = q_x + p q_z$$

hinzu, so stehen die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (I) für die Funktion z der zwei Veränderlichen x, y und das simultane System der zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (I*) für die zwei Funktionen p und q der drei Veränderlichen x, y, z zu einander genau in der analogen Beziehung, wie vorhin im Falle eines einfachen Integrals die Differentialgleichungen (1) und (1*).

Wegen der Unabhängigkeit des Integrals J^* von der Wahl der Integrationsfläche z folgt:

$$\int \{F(p, q) + (z_x - p) F_p(p, q) + (z_y - q) F_q(p, q)\}\, d\omega = \int F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)\, d\omega,$$

wenn wir das Integral rechter Hand auf einer Integralfläche $\bar{z}$ der partiellen Differentialgleichungen

$$\bar{z}_x = p(x, y, \bar{z}), \quad \bar{z}_y = q(x, y, \bar{z})$$

genommen denken und mit Hülfe dieser Formel gelangen wir dann sofort zu der Formel

$$(IV) \qquad \int F(z_x, z_y)\, d\omega - \int F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)\, d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q)\, d\omega$$

$$E(z_x, z_y, p, q) = F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p) F_p(p, q) - (z_y - q) F_q(p, q),$$

die für die Variation der Doppelintegrale die nämliche Rolle spielt, wie die vorhin angegebene Formel (4) für die einfachen Integrale und mit deren Hülfe wir wiederum die Frage beantworten können, inwiefern die Jacobische Bedingung im Verein mit der Weierstrassschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Die genannten Probleme sind nur Proben von Problemen; sie genügen jedoch, um uns vor Augen zu führen, wie reich, wie mannigfach und wie ausgedehnt die mathematische Wissenschaft schon heute ist und es drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich daß sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander ver-

stehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganze, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissenstoffes im Einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hülfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogieen in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen werden entdeckt. So kommt es, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.

Aber — so fragen wir — wird es bei der Ausdehnung des mathematischen Wissens für den einzelnen Forscher nicht schließlich unmöglich, alle Teile dieses Wissens zu umfassen? Ich möchte als Antwort darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, daß jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hülfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorieen erleichtern und umständliche ältere Entwickelungen beseitigen und daß es daher dem einzelnen Forscher, indem er sich diese schärferen Hülfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orientiren als dies für irgend eine andere Wissenschaft der Fall ist.

Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exacten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger!

Ueber die Transformation einer Hermiteschen Form von nicht verschwindender Determinante in sich.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 30. Juni 1900.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist es, den tieferen Grund für den von mir in einem Briefe an Herrn F. Klein[1]) bereits zur Sprache gebrachten Zusammenhang des Problems der Transformation einer Hermiteschen Form von nicht verschwindender Determinante in sich durch lineare conjugirt imaginäre Substitutionen (Specialfall: reelle lineare Substitution der reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante) mit der Aufsuchung der Elementartheiler der Determinante einer Schaar Hermitescher Formen darzulegen. Die hier vorliegenden Ueberlegungen ergeben unter Voraussetzung des zuerst in dem erwähnten Briefe mitgetheilten und dann von mir in Crelles Journal, Bd. 122, p. 69 noch weitergehend bewiesenen folgenden Satzes:

„I. Ist S eine Hermitesche Form von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q', so genügen die Elementartheilerexponenten der Determinante der Formenschaar $\mu S-H$, wobei μ einen Parameter, H eine beliebige Hermitesche Form von verschwindender oder nicht verschwindender De-

---

1) A. Loewy, Ueber die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. Math. Annalen, Bd. 52, p. 588.

terminante bedeuten, der Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right).$$

Hierbei ist $2s$ die Summe der Exponenten aller Elementartheiler, die für einen imaginären Werth des μ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler, die von einem reellen Werth des μ annullirt werden; $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die größte in $\frac{h}{2}$ enthaltene ganze Zahl," einen neuen einfachen Beweis für den Satz [1]):

„II. Führt eine lineare Substitution A gemeinsam mit ihrer conjugirt imaginären eine Hermitesche Form S von nicht verschwindender Determinante in sich über und ist $2s_1$ die Summe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler der charakteristischen Function der linearen Substitution A, welche für Größen, die nicht den absoluten Betrag 1 haben, verschwinden, so kann die Zahl $s_1 + \Sigma E\left(\frac{h_1}{2}\right)$ niemals größer sein, als die Charakteristik q' der Hermiteschen Form S; in der Summe durchläuft h_1 die Exponenten sämmtlicher Elementartheiler der charakteristischen Funktion der Substitution A, welche für Größen vom absoluten Betrage 1 verschwinden. $E\left(\frac{h_1}{2}\right)$ bedeutet die größte in $\left(\frac{h_1}{2}\right)$ enthaltene ganze Zahl.

$$q' \geqq s_1 + \Sigma E\left(\frac{h_1}{2}\right).\text{“}$$

Bei Voraussetzung des Theoremes II können die folgenden Betrachtungen auch als Beweis des Satzes I angesehen werden.

Nach der schon unter dem Text citirten Arbeit in den math. Annalen Bd. 50, § 4 (Nova Acta Leopoldina, Bd. 71, p. 393) ist jede Substitution A, welche mit ihrer conjugirt imaginären eine

---

1) A. Loewy, Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen, Math. Annalen, Bd. 50, p. 563, sowie Nova Acta Leopoldina, Bd. 71, p. 396; am letzteren Ort findet man auch einen Beweis des Theorems.

Hermitesche Form S von nicht verschwindender Determinante in sich überführt, von der Form:

$$A = e^{i\varphi}(S+T)^{-1}.(S-T);$$

hierbei ist T eine beliebige Form, welche nur an die Bedingung $\overline{T}' = -T$ geknüpft ist; φ bedeutet eine beliebige reelle Zahl, e ist die Exponentielle, $i = \sqrt{-1}$ [1]). Versteht man unter ϱ einen variablen Parameter, E in bekannter Weise $\Sigma x_\alpha \overline{x}_\alpha$, so wird die charakteristische Funktion von A, d. h.:

$$\begin{aligned}\varrho E - A &= \varrho E - e^{i\varphi}(S+T)^{-1}.(S-T) \\ &= (S+T)^{-1}[\varrho(S+T) - e^{i\varphi}(S-T)] \\ &= (S+T)^{-1}.[(\varrho - e^{i\varphi})S + (\varrho + e^{i\varphi})T].\end{aligned}$$

Diese Gleichung findet sich auch in einem Briefe vom 2. April 1900, den Herr Bromwich aus Cambridge an mich richtete; Herr Bromwich suchte für den Satz II einen neuen Beweis zu erbringen, der sich jedoch nicht als einwandsfrei erwies. Dieses Schreiben gab mir die Anregung, mich von neuem mit diesen Fragen zu beschäftigen.

Jede Form T, welche der Bedingung $\overline{T}' = -T$ genügt, ist gleich iH, wobei $i = \sqrt{-1}$ und H eine Hermitesche Form ($\overline{H}' = H$) bedeutet; daher wird:

$$\varrho E - A = (S+T)^{-1}[(\varrho - e^{i\varphi})S + i(\varrho + e^{i\varphi})H].$$

Setzt man

$$\mu = \left(\frac{\varrho - e^{i\varphi}}{\varrho + e^{i\varphi}}\right) i,$$

so entspricht jedem Elementartheiler $(\varrho - \varrho_1)^{e_1}$ der Determinante $\varrho E - A$ ein mit demselben Exponenten e_1 behafteter Elementartheiler $(\mu - \mu_1)^{e_1}$ der Determinante von $\mu S - H$; hierbei ist

$$\mu_1 = \left(\frac{\varrho_1 - e^{i\varphi}}{\varrho_1 + e^{i\varphi}}\right) i.$$

Bezeichnet man mit $\overline{\mu}_1$ bezüglich $\overline{\varrho}_1$ die zu μ_1 und ϱ_1 conjugirt imaginären Werthe, so folgt: falls $\overline{\mu}_1 = \mu_1$, so wird $\varrho_1 . \overline{\varrho}_1 = 1$

1) Ich möchte noch hervorheben, daß auch in dem Specialfall, falls S eine reelle quadratische Form ist, jede reelle lineare Transformation, welche S in sich überführt, ausnahmslos von der obigen Form ist.

und umgekehrt, wenn $\varrho_1 . \overline{\varrho}_1 = 1$, so wird $\mu_1 = \overline{\mu}_1$. Genau dieselbe Rolle also, welche bei dem einen Problem die reellen Elementartheiler spielen, kommt bei dem anderen denen zu, welche für Größen vom absoluten Betrage 1 verschwinden. (Math. Annalen, Bd. 52, p. 590). Mithin folgt aus dem Satze I der Satz II und umgekehrt.

Wir wollen jetzt den Satz I in der erweiterten Fassung, wie er in Crelles Journ., Bd. 122, p. 69 zu finden ist, annehmen:

Ist H eine Hermitesche Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q_1', so genügen die Elementartheilerexponenten der Determinante von $\mu S - H$, wobei S eine Hermitesche Form von nicht verschwindender Determinante bedeutet und μ ein variabler Parameter ist, der Ungleichheit:

$$q_1' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hierbei ist $2s$ die Summe der Exponenten aller Elementartheiler, die für einen imaginären Werth des μ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler, die durch einen reellen, von Null verschiedenen Werth des μ annullirt werden, und h' nimmt die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler, die für $\mu = 0$ verschwinden, an. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die größte in $\frac{h}{2}$, $E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ die größte in $\frac{h'-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Die Anzahl der für $\mu = 0$ verschwindenden Elementartheiler ist unabhängig von S und gleich dem Defect $d = n - r$ von H; n bedeutet dabei die Variablenzahl in S, r den Rang von H.

Mit Hülfe dieses soeben angegebenen Satzes kann man auch den Effect der Einwirkung der Charakteristik von H auf die Elementartheilerexponenten der Determinante von $\varrho E - A$, wobei $A = e^{\varphi i}(S+T)^{-1}(S-T)$ und $T = iH$ ist, beurtheilen; den Elementartheilern von $\mu S - H$, welche für $\mu = 0$ verschwinden, entsprechen solche von $\varrho E - A$, welche für $\varrho = e^{\varphi i}$ verschwinden. Daher folgt:

Ist $A = e^{\varphi i}(S+T)^{-1}(S-T)$, wobei $T = iH$ ist und H eine Hermitesche Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q_1' und dem Defect d bedeutet, so gilt für

die Elementartheilerexponenten der vorgelegten Substitution A, welche die Hermitesche Form S von nicht verschwindender Determinante in sich überführt[1]), die Ungleichung:

$$q_1' \geqq s_1 + \Sigma E\left(\frac{h_1}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h_1'-1}{2}\right).$$

Hierbei hat s_1 dieselbe Bedeutung wie im Satze II; h_1 durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler der charakteristischen Funktion von A, welche für Werthe vom absoluten Betrage 1, die von $e^{\varphi i}$ verschieden sind, verschwinden; h_1' nimmt die Werthe der Exponenten aller derjenigen Elementartheiler, die von $e^{\varphi i}$ annullirt werden, an.

---

1) Die Substitution A transformirt in Verbindung mit ihrer conjugirt imaginären stets S in sich und jede Substitution, welche S in sich überführt, kann in die Form A gebracht werden.

Die automorphen Elementarformen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 14. Juli 1900.

Die Sätze Poincaré's über die Darstellung der automorphen Formen durch die von ihm eingeführten Reihen sind von E. Ritter[1]) aufs neue bearbeitet. Ritter schlägt hierbei einen zu Poincaré's eigener Entwicklung entgegengesetzten Weg ein, insofern er die Elementarform, welche bei Poincaré als „element simple" am Schluß einer längeren analytischen Untersuchung gewonnen wird, an die Spitze der ganzen Entwicklung stellt.

Die Elementarform ist von zwei Stellen ζ, ξ des automorphen Gebildes abhängig, welches letztere dem Geschlechte null angehöre. Sie ist genauer gesprochen von zwei Variabelenpaaren ζ_1, ζ_2 und ξ_1, ξ_2 abhängig und wird in diesem Sinne durch $\Omega\,(\zeta_1, \zeta_2; \xi_1, \xi_2)$ bezeichnet. Die Dimension im ersten Paare sei d; dann ist diejenige im zweite Paare $\bar{d} = -d-2$.

In der genannten Arbeit Ritter's ist der Paragraph 17 der Theorie der Elementarform gewidmet[2]). Indessen ist Ritter hier noch nicht überall zu der einfachsten Gestalt dieser Theorie durchgedrungen und seine Entwicklung ist nicht an allen Stellen einwurfsfrei. Der Hauptgesichtspunkt ist, daß Ritter es unterläßt, das Verhalten der durch eine Poincaré'sche Reihe definierten Ele-

1) „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte null", Mathem. Annalen Bd. 41 (1891).

2) In der weiteren Abhandlung „Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebilden", Mathem. Annalen Bd. 44 (1893) behandelt Ritter die Elementarformen für beliebiges Geschlecht p auf algebraischer Basis.

mentarform für den Fall klarzustellen, daß entweder ζ oder ξ in eine feste Polygonecke rückt[1]).

Hier sind es vor allem die etwaigen parabolischen Zipfel, welche Bedenken erregen. Es ist Ω als Form der ζ_1, ζ_2 durch eine Poincaré'sche Reihe erklärt, welche im Fundamentalbereiche einen an der Stelle ξ gelegenen Pol erster Ordnung besitzt. Die Convergenz dieser Reihe ist nun zwar wenigstens für $d < -2$ durch eine von Herrn v. Mangoldt in den Gött. Nachr. v. 1886 gegebene Entwicklung auch für den Fall bewiesen, daß ξ in einer parabolischen Spitze liegt. Indes ist eine genaue Untersuchung über das analytische Verhalten von Ω bei Annäherung des ξ an eine parabolische Spitze unabweislich; denn die für die Theorie der Elementarformen grundlegende Aussage, eine Reihe Ω oder eine lineare Combination solcher Reihen, welche bei Anwendung der Gruppenoperationen auf ξ_1, ξ_2 invariant ist, stelle auch in ξ_1, ξ_2 eine automorphe Form dar, ist nur dann bewiesen und brauchbar, wenn man das analytische Bildungsgesetz von Ω in parabolischen Zipfeln genau kennt.

Die nachfolgenden Zeilen geben die Hauptpunkte einer Behandlung der Elementarformen für $p = 0$, welche jedoch in der Hauptsache auch für $p > 0$ ihre Gültigkeit bewahrt. Von der Dimension $d < 0$ wird angenommen, daß die ihr zugehörigen Poincaré'schen Reihen convergieren. Die Substitutionen der Gruppe heißen in unimodularer homogener Gestalt $U_0 = 1$, U_1, $U_2, \ldots$, eine beliebige unter ihnen U_k; die nicht-homogenen Substitutionen seien entsprechend durch das Symbol V bezeichnet. Der Summationsbuchstabe k wird gelegentlich auch nur auf die n Erzeugenden oder auf ein sonstiges beschränktes Substitutionssystem bezogen. Ein Multiplicatorsystem $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ wird symbolisch durch M bezeichnet; das System der Multiplicatoren $\bar{\mu}_k = \mu_k^{-1}$ heiße zu M invers und werde symbolisch $\overline{M}$ genannt. Rationale Formen der Dimension d sollen durch H_d, rationale ganze Formen dieser Dimension im speciellen durch G_d bezeichnet werden.

Eine automorphe Form oder eine Poincaré'sche Reihe, welche im Fundamentalbereiche σ Pole erster Ordnung hat, heiße σ-polig

---

1) Die elliptischen Punkte betreffend können allerdings die Entwicklungen der zweiten soeben genannten Arbeit als Ersatz gelten. Aber indem diese Arbeit an die Darstellung der Elementarform durch die Klein'sche Primform und nicht an diejenige durch eine Poincaré'sche Reihe anknüpft, bleibt für die durch eine Poincaré'sche Reihe definierte Elementarform (und dies ist schließlich mit Rücksicht auf die Anwendung innerhalb der Theorie der Poincaré'schen Reihen die eigentlich gewünschte Definition der Elementarform) das im Texte sogleich auszuführende Bedenken wegen der parabolischen Zipfel bestehen.

und für $\sigma = 0$ polfrei. Bei der Bildung einpoliger Reihen ist zu unterscheiden, ob das zur Gruppe gehörende Polygonnetz N Grenzcurven aufweist oder die ganze Ebene bis auf isoliert liegende Grenzpunkte bedeckt. Im Grenzcurvenfalle ist eine einpolige Reihe bei gegebenen d und M dargestellt durch:

$$\sum_k \mu_k^{-1} \frac{1}{(\zeta^{(k)}, \xi)\, G_{-d-1}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})}, \tag{1}$$

wo die $-d-1$ Nullpunkte von $G_{-d-1}(\zeta_1, \zeta_2)$ außerhalb N liegen sollen; der Pol ξ liege im Netze N, aber entfernt von jeder festen Polygonecke.

Liegt keine Grenzcurve vor, so wählen wir die Stelle η beliebig in N, jedoch nicht mit ξ aequivalent und gleichfalls von den festen Ecken verschieden. Es seien alsdann $V_1, V_2, \ldots, V_{-d-1}$ Substitutionen der Gruppe, die von einander und von der Identität verschieden sind, deren dritte Coefficienten γ nicht durchgängig verschwinden, und deren zugehörige Multiplicatoren $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{-d-1}$, sofern nicht $M_0 = 1$ vorliegt, nicht alle $= 1$ sind.

Zur Bildung einer einpoligen Reihe benutzen wir den Ansatz:

$$\sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_1(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})}{(\zeta^{(k)}, \xi)\cdot(\zeta^{(k)}, \eta)(\zeta^{(k)}, \eta')\ldots(\zeta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})}. \tag{2}$$

Hier soll $G_1(\zeta_1, \zeta_2)$ eine lineare Form $a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2$ sein, die Stellen $\eta', \eta'', \ldots, \eta^{(-d-1)}$ seien durch

$$\eta' = V_1(\eta), \quad \eta'' = V_2(\eta), \ldots, \quad \eta^{(-d-1)} = V_{-d-1}(\eta)$$

gegeben, und die Klammersymbole $(\xi, \eta), \ldots$ bedeuten hier wie entsprechend in (1) abgekürzt die Ausdrücke $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1, \ldots$

Die Coefficienten a_1, a_2 sind nun derart zu bestimmen, daß bei η kein Pol vorliegt, während der Pol bei ξ erhalten bleibt. Durch Heranziehung der Potenzreihenentwicklungen des Ausdrucks (2) bei η und ξ kleiden sich diese Forderungen in die nachfolgende Gestalt: Der Ausdruck:

$$A = \sum_{k=0}^{-d-1} \mu_k^{-1} \frac{G_1(\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)})}{(\eta^{(k)}, \eta)\ldots(\eta^{(k)}, \eta^{(k-1)})(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)})\ldots(\eta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})}(\xi, \eta^{(k)})^{-1} \tag{3}$$

muß gleich 0 sein, während:

$$\frac{G_1(\xi_1, \xi_2)}{(\xi, \eta)(\xi, \eta')\ldots(\xi, \eta^{(-d-1)})}$$

nicht verschwinden darf. Diesen letzteren Ausdruck multipliciere man mit $\left(\frac{\eta_2}{\xi_2}\right)^{d+2}$ und entwickele ihn, was die Durchsichtigkeit der

Ueberlegung sehr viel größer gestaltet, in Partialbrüche. Man gewinnt so:

$$(4)\quad B = \sum_{k=0}^{-d-1} (\gamma_k \eta + \delta_k)^{-d-2} \frac{G_1(\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)})}{(\eta^{(k)}, \eta) \ldots (\eta^{(k)}, \eta^{(k-1)})(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)}) \ldots (\eta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})} (\xi, \eta^{(k)})^{-1}$$

In einem Falle kann man der Forderung $A = 0$, $B \neq 0$ nicht genügen, nämlich wenn $d = -2$, $M = 1$ vorliegt, wo ersichtlich $A = B$ wird. Dies kommt auf den ohnehin bekannten Satz hinaus, daß eine eigentlich automorphe Form der Dimension -2 mindestens zweipolig ist. In allen übrigen Fällen kann man durch zweckmäßige Auswahl von η der Forderung $A = 0$, $B \neq 0$ genügen.

Beim Beweise dieser Behauptung denken wir zunächst ξ fest und η beweglich und schreiben dieserhalb:

$$A = a_1 \Phi_1(\eta_1, \eta_2) + a_2 \Phi_2(\eta_1, \eta_2),$$
$$B = a_1 \Psi_1(\eta_1, \eta_2) + a_2 \Psi_2(\eta_1, \eta_2),$$

indem wir $\eta_1^{(k)}$, $\eta_2^{(k)}$ durch ihre linearen Ausdrücke in η_1, η_2 ersetzt denken. Wegen $A = 0$ folgt hier:

$$(5)\quad a_1 : a_2 = \Phi_2(\eta_1, \eta_2) : -\Phi_1(\eta_1, \eta_2).$$

Weiter besteht entweder die Gleichung:

$$(6)\quad \frac{\Phi_1(\eta_1, \eta_2)}{\Psi_1(\eta_1, \eta_2)} = \frac{\Phi_2(\eta_1, \eta_2)}{\Psi_2(\eta_1, \eta_2)}$$

in η identisch (und dann ist mit A immer auch $B = 0$), oder die Gleichung (6) gilt nur für endlich viele η (und alsdann läßt sich η so wählen, daß $B \neq 0$ ist.

Liegt der erste Fall vor, so bezeichne man den gemeinsamen Wert der rechten und linken Seite von (6) durch $R(\eta)$. Dann folgt, daß $A : B$ unabhängig von a_1, a_2 mit dieser rationalen Function $R(\eta)$ identisch ist. Es ergiebt sich hieraus weiter, daß $A : B$ die ξ_1, ξ_2 nicht mehr enthalten kann; setzt man nämlich $a_1 = \xi_2$, $a_2 = -\xi_1$, so fallen die ξ sowohl aus A wie B aus. Bei dieser Sachlage wird $A : B = R(\eta)$ seinen von ξ freien Wert auch dann unverändert behalten, wenn wir jetzt ξ hinterher beliebig abändern. Läßt man aber ξ an die Stelle $\eta^{(k)}$ rücken, so folgt:

$$\frac{A}{B} = R(\eta) = \frac{(\gamma_k \eta + \delta_k)^{d+2}}{\mu_k} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, -d-1.$$

Nimmt man $k = 0$, so zeigt sich, daß $R(\eta)$ mit 1 identisch ist.

Wählt man sodann ein k mit $\gamma_k \neq 0$, so folgt $d = -2$ und damit weiter $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1, \ldots, \mu_k = 1$, so daß wir auf den ausgeschlossenen Fall $d = -2$, $M = 1$ zurückkommen. Wir können demnach η fortan so gewählt denken, daß thatsächlich $A = 0$ und $B \neq 0$ gilt.

Der Proportion (5) entsprechen wir nunmehr, indem wir:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=0}^{-d-1} \mu_k^{-1} \eta_2^{(k)} \frac{(\xi, \eta) \ldots (\xi, \eta^{(k-1)})(\xi, \eta^{(k+1)}) \ldots (\xi, \eta^{(-d-1)})}{(\eta^{(k)}, \eta) \ldots (\eta^{(k)}, \eta^{(k-1)})(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)}) \ldots (\eta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})}, \\ a_2 &= -\sum_{k=0}^{-d-1} \mu_k^{-1} \eta_1^{(k)} \frac{(\xi, \eta) \ldots (\xi, \eta^{(k-1)})(\xi, \eta^{(k+1)}) \ldots (\xi, \eta^{(-d-1)})}{(\eta^{(k)}, \eta) \ldots (\eta^{(k)}, \eta^{(k-1)})(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)}) \ldots (\eta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

setzen. An Stelle von (2) schreiben wir die einpolige Reihe ausführlicher:

$$\sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{1, -d-1}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}; \xi_1, \xi_2)}{(\zeta^{(k)}, \xi) \cdot (\zeta^{(k)}, \eta)(\zeta^{(k)}, \eta') \ldots (\zeta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})}, \tag{8}$$

insofern G eine ganze Form der Dimension $-d-1$ in den ξ_1, ξ_2 wird.

Was wird nun aus den hergestellten einpoligen Reihen, falls ξ in den Fixpunkt ε einer elliptischen Substitution der Periode l rückt, für welche das Multiplicatorsystem M den Multiplicator $\mu = e^{\pi i \frac{\lambda}{l}}$ vorschreibt? Wir finden, mag der Grenzcurvenfall vorliegen oder nicht, daß die Reihe bei ε einen (im Fundamentalbereiche gemessenen) Pol der Ordnung $\frac{1}{l}$ gewinnt oder polfrei wird, je nachdem der Multiplicator μ die Congruenz:

$$\lambda \equiv -d-2 \pmod{2l} \tag{9}$$

erfüllt oder nicht. Es darf nicht überraschen, daß die Reihe jetzt polfrei werden kann; denn es werden ja nunmehr l Glieder an der Stelle ε polar unstetig. Gilt die angegebene Congruenz nicht, so ist natürlich das identische Verschwinden der Reihe nicht ausgeschlossen.

Es ist nun eine bekannte Auffassung, nach welcher man einer automorphen Form der Dimension d in der einzelnen elliptischen Ecke ε des Fundamentalbereichs einen Nullpunkt der Ordnung $\frac{m}{l}$ zu erteilen hat, wobei die ganze Zahl m aus

$$\frac{m}{l} = \frac{d+\lambda}{2l} - E\left[\frac{d+\lambda}{2l}\right]$$

zu bestimmen ist. Im Falle der Congruenz (9) wird $m = l-1$;

und also müßte mit dem ein für alle Mal bei ε festliegenden Nullpunkte der Ordnung $\frac{l-1}{l}$ ein Pol erster Ordnung zusammenfallen, damit die eben bestimmte Ordnung $\frac{1}{l}$ des Poles entsteht. In diesem Sinne bleiben unsere Reihen im Falle der Congruenz (9) einpolig.

Auf Grund der genannten Auffassung ist es nun leicht, auch wenn (9) nicht gilt, eine einpolige Reihe für $\xi = \varepsilon$ herzustellen. Wir setzen zunächst an:

$$\sum_k \frac{\mu_k^{-1}}{(\zeta^{(k)}, \varepsilon)^{l-m}\, G_{-d+m-l}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})},$$

wo G_{-d+m-l} für $-d+m-l<0$ der reciproke Wert einer ganzen Form der Dimension $d-m+l$ sein soll. Diese Reihe besitzt in der That in der Ecke ε des Fundamentalbereichs einen Pol erster Ordnung. Freilich treten, falls keine Grenzcurven vorliegen und $-d+m-l>0$ ist, noch weitere, den Nullpunkten von G entsprechende Pole auf. Man kann aber erreichen, daß dieselben nur einfache sind und außerhalb der festen Ecken liegen. Durch Zusatzt geeignet gewählter Reihen (8) lassen sich alsdann diese accessorischen Pole entfernen.

Indem wir zu beliebiger Lage des Poles ξ zurückkehren, folgen wir Ritter beim Uebergang von der einpoligen Reihe zur Elementarform $\Omega(\zeta_1, \zeta_2;\, \xi_1, \xi_2)$. Im Grenzcurvenfalle gilt:

$$(10) \qquad \Omega(\zeta_1, \zeta_2;\, \xi_1, \xi_2) = \sum_k \mu_k^{-1} \frac{G_{-d-1}(\xi_1, \xi_2)}{(\zeta^{(k)}, \xi)\, G_{-d-1}(\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)})}.$$

Im anderen Falle tritt der besonders einfache Umstand ein, daß die rationale Form:

$$\frac{G_{1,\,-d-1}(\zeta_1, \zeta_2;\, \xi_1, \xi_2)}{(\zeta, \eta)(\zeta, \eta')\ldots.(\zeta, \eta^{(-d-1)})},$$

falls man die ζ_1, ζ_2 mit den ξ_1, ξ_2 identisch nimmt, zufolge (7) den von den ζ und ξ überhaupt freien Wert gewinnt:

$$\sum_{k=0}^{-d-1} \frac{\mu_k^{-1}}{(\eta^{(k)}, \eta)\ldots(\eta^{(k)}, \eta^{(k-1)})(\eta^{(k)}, \eta^{(k+1)})\ldots(\eta^{(k)}, \eta^{(-d-1)})},$$

welcher nach den obigen Rechnungen nicht verschwindet. Indem wir diesen Wert noch als gemeinsamen Nenner in die Coefficienten a_1, a_2 aufnehmen, bleibt für die Elementarform $\Omega(\zeta_1, \zeta_2;\, \xi_1, \xi_2)$ im fraglichen Falle direct das Bildungsgesetz (8) erhalten.

Die Grundeigenschaften der Elementarform, in welcher wir nun neben den ζ auch die ξ_1, ξ_2 variabel denken, hat Ritter in den

genannten Arbeiten entwickelt. Wir merken noch an: Es hat keine Schwierigkeit, die Stelle ξ (was ursprünglich ausgeschlossen war) nach η oder eine mit η aequivalente Stelle rücken zu lassen. Die bei Ritter auftretenden secundären Pole der Elementarform (im Falle, daß keine Grenzcurven vorliegen) sind bei der obigen Elementarform (8) vermieden. Die Elementarform verschwindet als Form der ξ_1, ξ_2 stets und nur dann identisch, falls ζ in einer parabolischen Spitze oder in einer solchen elliptischen Ecke gelegen ist, für welche $(d + \lambda)$ nicht durch $2\,l$ teilbar ist.

Es wird sich nun um die Lösung der Hauptfrage handeln, wie sich nämlich die Elementarform bei Annäherung des ξ an eine parabolische Spitze verhält. Die letztere dürfen wir nach dem Punkte ∞ der ζ-Ebene verlegen. Die erzeugende parabolische Substitution sei

$$\zeta_1 = \zeta_1 + 2 i \pi \zeta_2, \quad \zeta_2 = \zeta_2.$$

Das System M liefere für dieselbe den Multiplicator $\mu = e^{2 i \pi \frac{\lambda}{l}}$, wo λ in Uebereinstimmung mit $0 < \lambda \leqq l$ gewählt sei.

Für $\xi_2^{-\bar{d}}\,\Omega$ soll eine in der Umgebung des fraglichen parabolischen Punktes gültige analytische Darstellung gewonnen werden, welche das Verhalten von Ω für lim. $\xi = \infty$, d. h. im parabolischen Zipfel selber abzulesen gestattet. Dies gelingt in der Weise, daß man zunächst die nach ζ genommene $(-d-1)$ste Ableitung von $\xi_2^{-\bar{d}}\,\Omega$ darstellt und von hier rückwärts durch Integration zu einem Ausdruck für $\xi_2^{-\bar{d}}\,\Omega$ selbst gelangt.

Das Anfangsglied der Reihe (10) kann man so schreiben:

$$- \zeta_2^{l}\, \xi_2^{\bar{d}}\, \frac{G_{-d-1}(\xi, 1)}{(\xi - \zeta)\, G_{-d-1}(\zeta, 1)}, \tag{11}$$

dasjenige der Reihe (8) so:

$$- \zeta_2^{l}\, \xi_2^{\bar{d}}\, \frac{G_{1,\, -d-1}(\zeta, 1\,;\, \xi, 1)}{(\xi - \zeta)\,(\zeta\,\eta_2 - \eta_1)\,(\zeta\,\eta_2' - \eta_1') \ldots (\zeta\,\eta_2^{(-d-1)} - \eta_1^{(-d-1)})}. \tag{12}$$

Die hier beide Male an zweiter Stelle stehenden Quotienten haben, als rationale Functionen von ζ aufgefaßt, bei $\zeta = \infty$ einen Nullpunkt der Ordnung $-d$. Der Zusatz des Factors ζ_2^{l} liefert alsdann ein Product, welches bei $\zeta = \infty$ selber endlich bleibt. Man muß, um das Verhalten bei $\zeta = \infty$ abzuschätzen, berücksichtigen, daß $G_{-d-1}(\zeta_1, \zeta_2)$ für $\zeta_2 = 0$ von 0 verschieden ist, resp. daß keine der Größen $\eta_2, \eta_2', \ldots, \eta_2^{(-d-1)}$ mit null identisch ist.

Auch die in Bezug auf ξ genommenen Ableitungen erster und höherer Ordnung des in (11) bez. (12) enthaltenen Quotienten ge-

nügen der Bedingung bei $\zeta = \infty$ endlich zu bleiben und stellen auch sonst rationalen Formen $H_d(\zeta_1, \zeta_2)$ dar, welche zur Herstellung Poincaré'scher Reihen geeignet sind. Hieraus folgt: Die Reihe für $-\xi_2^{\bar{d}}\,\Omega$ kann, unbeschadet ihrer gleichmäßigen Convergenz im Innern des Netzes N, wiederholt nach ξ gliedweise differenziert werden und liefert auf diese Weise die nach ξ genommenen Ableitungen von $-\xi_2^{\bar{d}}\,\Omega$.

Vor der Differentiation entwickele man den in (11) bez. (12) mit $-\zeta_2^d \xi_2^{\bar{d}}$ multiplicierten Quotienten, als rationale Function von ξ, in die Summe eines auf den Pol ζ bezüglichen Partialbruchs und einer in ξ auf den Grad $-d-2$ ansteigenden ganzen Function:

$$\frac{1}{\xi-\zeta} + R_0(\zeta) + \xi R_1(\zeta) + \dots + \xi^{(-d-2)} R_{-d-2}(\zeta).$$

Die Bauart der hierbei eintretenden rationalen Functionen R von ζ wird man in beiden Fällen (11) bez. (12) leicht verfolgen. Für $-\xi_2^{-\bar{d}}\,\Omega$ ergiebt sich:

$$(13)\quad -\xi_2^{-\bar{d}}\,\Omega = \sum_k \mu_k^{-1} (\zeta_2^{(k)})^d \Big[\frac{1}{\xi-\zeta^{(k)}} + R_0(\zeta^{(k)}) + \xi R_1(\zeta^{(k)}) + \dots \\ \dots + \xi^{-d-2} R_{-d-2}(\zeta^{(k)})\Big].$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die getrennte Summierung der einzelnen in der großen Klammer stehenden Glieder unstatthaft ist; die Glieder R_0, $\xi R_1, \dots, \xi^{-d-2} R_{-d-2}$ spielen hier vielmehr die Rolle der convergenzerzeugenden Zusatzglieder.

Bezeichnen wir nun die nach ξ genommene Ableitung ν ter Ordnung durch das Symbol D_ν, so folgt:

$$(14)\qquad D_{-d-1}[\xi_2^{-\bar{d}}\,\Omega] = (-1)^d(-d-1)!\ \sum_k (\zeta_2^{(k)})^d \cdot \frac{1}{(\xi-\zeta^{(k)})^{-d}}.$$

Da diese Reihe absolut convergent ist, so können wir ihre Glieder beliebig umordnen. Wir wählen eine Anordnung in Bezug auf die vorliegende parabolische Untergruppe. Die Substitutionen eines Repraesentantensystems derselben bezeichnen wir generell durch U_h. Bei der Gestalt der parabolischen Erzeugenden und ihres Multiplicators folgt:

$$(15)\quad \sum_k (\zeta_2^{(k)})^d \cdot \frac{1}{(\xi-\zeta^{(k)})^{-d}} = \sum_h \left[\mu_h^{-1} (\zeta_2^{(h)})^d \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\nu i\pi\frac{\lambda}{l}}}{(\xi-\zeta^{(h)}-2\nu i\pi)^{-d}}\right].$$

Für die hier rechts stehende innere Summe gilt weiter:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\nu i\pi\frac{\lambda}{l}}}{(\xi-\zeta^{(h)}-2\nu i\pi)^{-d}} = \sum_{\sigma=0}^{l-1}\left[e^{2\sigma i\pi\frac{\lambda}{l}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi-\zeta^{(h)}-2\sigma i\pi-2\nu i\pi l)^{-d}}\right].$$

Hier kann man die bekannte Formel anwenden:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi-a-2\nu i\pi l)^{-d}} = -\frac{1}{2l} D_{-d-1}\left(\frac{1+e^{\frac{\xi}{l}}.e^{-\frac{a}{l}}}{1-e^{\frac{\xi}{l}}.e^{-\frac{a}{l}}}\right),$$

wo rechts nach Ausführung der $(-d-1)$-maligen Differentiation in Bezug auf ξ eine rationale Function von $e^{\frac{\xi}{l}}$ vorliegt, die mit $e^{\frac{\xi}{l}}$ verschwindet. Setzt man $e^{\frac{\xi}{l}} = t$, so folgt für die Umgebung des Punktes $t = 0$, d. h. der parabolischen Spitze:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi-a-2\nu i\pi l)^{-d}} = -l^d\left[e^{-\frac{a}{l}}t + \frac{e^{-\frac{2a}{l}}}{2^{d+1}}t^2 + \frac{e^{-\frac{3a}{l}}}{3^{d+1}}t^3 + \cdots\right];$$

und nach leichter Zwischenrechnung entspringt hieraus weiter für die rechte Seite der Gleichung (15):

$$-l^{d+1}\sum_h \mu_h^{-1}(\zeta_2^{(h)})^d e^{-\frac{\lambda\zeta^{(h)}}{l}} t^\lambda\left[\frac{1}{\lambda^{d+1}} + \frac{e^{-\zeta^{(h)}}}{(\lambda+l)^{d+1}}t^l + \frac{e^{-2\zeta^{(h)}}}{(\lambda+2l)^{d+1}}t^{2l} + \cdots\right].$$

Im einzelnen Gliede dieser $\sum\limits_h$ steht eine Potenzreihe, welche in der Umgebung von $t = 0$ gleichmäßig convergent ist. Die $\sum\limits_h$ selbst ist ebenfalls in der Umgebung von $t = 0$, eventuell vom Punkte $t = 0$ selber abgesehen, gleichmäßig convergent; denn sie stellt nur in anderer Form die in (15) rechts stehende Reihe dar, welche eine gleichmäßig convergente Poincaré'sche Reihe ist, falls ξ im „Innern" des Netzes N variiert. Bei dieser Sachlage können wir einen von Weierstrass in den Monatsberichten der Berliner Akademie von 1880 bewiesenen Satz anwenden, demzufolge die Umordnung der letzten Reihe nach ansteigenden Potenzen von t statthaft ist.

Wir gewinnen auf diese Weise für $D_{-d-1}\,[\xi_2^{-d}\,\Omega]$ selbst eine Potenzreihe nach t, deren Coefficienten Formen der Dimension d von ζ_1, ζ_2 sind. Die Integration führt endlich auf das nachfolgende Bildungsgesetz der Elementarform:

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2;\ \xi_1, \xi_2) = \xi_2^{d}\Big\{e^{\frac{\lambda\xi}{l}}\,[\varphi_d^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2) + \varphi_d^{(1)}(\zeta_1,\zeta_2)e^{\xi} + \varphi_d^{(2)}(\zeta_1,\zeta_2)e^{2\xi} + \cdots]$$

$$+\,\psi_d^{(0)}(\zeta_1,\zeta_2) + \psi_d^{(1)}(\zeta_1,\zeta_2)\,\xi + \cdots + \psi_d^{(-d-2)}(\zeta_1,\zeta_2)\,\xi^{-d-2}\Big\}.$$

Hier sind die φ, ψ Formen der Dimension d von ζ_1, ζ_2; und zwar läßt sich aus dem Verhalten von Ω bei Ausübung der parabolischen Erzeugenden auf ξ_1, ξ_2 der Schluß ziehen, daß $\psi_d^{(1)}$, $\psi_d^{(2)}, \ldots,$ $\psi_d^{(-d-2)}$ polfreie oder ganze automorphe Formen sind. Die erhaltene Darstellung von Ω bezieht sich auf ein in der Umgebung der parabolischen Spitze variabeles ξ; sie gestattet unmittelbar, das Verhalten von Ω abzulesen, wenn ξ in die Spitze selbst hineinrückt. Ist ein einzelnes Ω oder eine lineare Combination von Elementarformen gegenüber der parabolischen Erzeugenden bis auf den Factor μ invariant, so werden in der Darstellung des Ω bez. der Ω-Combination die Glieder mit Potenzen von ξ durch identisches Verschwinden der Coefficienten ausfallen. Dann aber liegt bei der parabolischen Spitze auch in ξ das Verhalten einer automorphen Form vor, von der man überdies noch sieht, daß sie in der parabolischen Spitze polfrei ist.

Erst dieses Ergebnis begründet die Verwendbarkeit der Elementarform zum Beweise des fundamentalen Poincaré'schen Satzes über die Darstellbarkeit der automorphen Formen durch die nach Poincaré benannten Reihen.

Die sich bietende Gelegenheit benutze ich zur Mitteilung eines weiteren Resultates, welches für die automorphen Gebilde des Geschlechtes null von Wichtigkeit ist. Ritter hat in § 6 der ersten oben genannten Arbeit die für die Lehre von den eindeutigen automorphen Formen grundlegende Theorie der Multiplicatorsysteme behandelt. Dabei ist eine Hauptfrage, nämlich die nach der Anzahl der Multiplicatorsysteme, falls alle n erzeugenden Substitutionen elliptisch sind, unerledigt geblieben.

Die Perioden der n Erzeugenden seien $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Unter $\delta_{\alpha\beta}$ soll die größte in l_α und l_β zugleich aufgehende ganze Zahl verstanden werden; desgleichen sei $\delta_{\alpha\beta\gamma}$ die größte zugleich in l_α, l_β und l_γ aufgehende ganze Zahl u. s. w. Für $n = 3$ ist die Anzahl der Multiplicatorsysteme bei geraden Dimensionen:

$$\frac{\delta_{12}, \delta_{13}\, \delta_{23}}{\delta_{123}},$$

für $n = 4$ folgt:

$$\frac{\delta_{12}\, \delta_{13}\, \delta_{14}\, \delta_{23}\, \delta_{24}\, \delta_{34}\, \delta_{1234}}{\delta_{123}\, \delta_{124}\, \delta_{134}\, \delta_{234}};$$

allgemein ist die fragliche Anzahl:

$$\frac{\delta_{12}\, \delta_{13} \ldots \delta_{n-1, n}\, \delta_{1234} \ldots \delta_{n-3, n-2, n-1, n}\, \delta_{123456} \ldots}{\delta_{123}\, \delta_{124} \ldots \delta_{n-2, n-1, n}\, \delta_{12345} \ldots \delta_{n-4, n-3, n-2, n-1, n} \ldots}.$$

Der Beweis wird auf Grund des Umstandes, daß im Einzelfalle alle Multiplicatorsysteme eine Abel'sche Gruppe bilden, vermöge einer Methode des Ausschaltens und Hinzufügens (Sieb des Eratosthenes) geführt.

Für ungerade Dimensionen kommen entweder überhaupt keine Multiplicatorsysteme vor oder genau so viele, wie bei geraden Dimensionen. Wann letzteres eintritt, wird a. a. O. erschöpfend angegeben.

Die Ritter'sche Primform auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 28. Juli 1900.

Die Primform $\Omega(x, y)$, welche Hr. F. Klein bei seinen Untersuchungen über Abel'sche Functionen[1]) an Stelle der Weierstrass'schen Primfunction $E(x, y)$ gesetzt hat, multipliciert sich bei einem Umlaufe der Stelle x auf der Riemann'schen Fläche mit der Exponentialfunction eines überall endlichen Integrales. Das betreffende Gesetz ist a. a. O. noch nicht ganz vollständig angegeben, insofern noch eine Vorzeichenbestimmung offen blieb.

E. Ritter, welcher auf diesen Entwicklungen fußend die Theorie der automorphen Formen eines beliebigen Geschlechtes p vermöge algebraischer Mittel neu zu begründen unternahm[2]), hat zunächst die Theorie der Primform einer wesentlichen Ausgestaltung unterzogen. Es galt erstlich, nicht nur die noch offene Vorzeichenbestimmung zu treffen, sondern sogar das Verhalten von $\log \Omega(x, y)$ bei beliebigen Umläufen der Stelle x auf der Riemann-schen klarzustellen, um damit zugleich auch Wurzeln beliebiger Grade aus $\Omega(x, y)$ beherrschen zu können. Darüber hinaus hat Ritter die Primform durch Division mit einer „Mittelform" zu einer von ihm so benannten „multiplicativen" Primform $P(x, y)$ ausgestaltet, welche sich dadurch vor $\Omega(x, y)$ auszeichnet,

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 36, pg. 1 ff. (1889).

2) „Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebilden beliebigen Geschlechtes u. s. w.", Mathem. Annalen, Bd. 44, pg. 261 ff. (1893).

daß sie gegenüber einem Umlaufe der Stelle x einen von x unabhängigen Factor annimmt.

Diese letztere Eigenschaft kommt durch die Benennung „multiplicativ“ nicht recht zum Ausdruck. Es scheint mir demnach angebracht, die beiden Gestalten $\Omega(x, y)$ und $P(x, y)$ der Primform durch Personalbenennungen auseinander zu halten; in diesem Sinne will ich jene als die „Klein'sche Primform“ bezeichnen, diese als die „Ritter'sche“.

Um die Eigenschaften der Primform zu begründen, bedarf Ritter der nicht ganz einfachen Untersuchungen von Hrn. H. Burkhardt über das Verhalten der Integrale dritter Gattung bei gleichzeitiger Abänderung der Grenzen und der Parameter [1]). Ritter muß seine Untersuchung ferner auf eine specielle Form der Riemann'schen Fläche, die Klein als „kanonisch“ bezeichnet, gründen; und es gelingt ihm nur vermöge einer ausgedehnten Kette schwieriger Betrachtungen, welche an die Aufnahmefähigkeit des Lesers erhebliche Anforderungen stellen, zu dem einfachen Periodenverhalten des Logarithmus der Primform $P(x, y)$ vorzudringen, wie es pg. 292 a. a. O. angegeben ist. Stellt diese Entwicklung der bewunderungswürdigen Kraft ihres leider so früh dahingeschiedenen Verfassers das rühmendste Zeugnis aus, so dürfte doch andrerseits bei der fundamentalen Bedeutung, welche die Primform $P(x, y)$ für die Theorie der automorphen Functionen besitzt, jede zumal weitgehende Vereinfachung in der Theorie dieser Ritter'schen Primform willkommen sein.

Bei der Definition der Klein'schen Primform $\Omega(x, y)$ schließe ich mich an die Darstellung an, welche ich im zweiten Bande der „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen“ [2]) pg. 475 ff. gegeben habe. Es handelt sich dabei sogleich um eine „transcendent normierte“ Primform $\Omega(x, y)$. Dem vorgelegten algebraischen Gebilde des Geschlechtes p sei „irgend eine“ zugehörige Riemann'sche Fläche zu Grunde gelegt, welche m-blättrig die z-Ebene überlagere. Auf der Fläche sei in der in „Mod.“ II befolgten Weise ein kanonisches System von $2p$ Querschnitten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ausgeführt. Neben z benutzen wir nach „Mod.“ II pg. 485 die beiden homogenen Variabelen z_1, z_2, deren Quotient $z_1 : z_2 = z$ ist. Das zum ausgewählten Querschnittsystem gehörige Normalintegral dritter Gattung $\Pi_{\xi,\,\eta}^{x,\,y}$ (cf. „Mod.“ II pg. 478 und 496) läßt sich

1) Siehe Burkhardt's „Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen“, Mathem. Annalen, Bd. 32, pg. 381 ff. (1888).

2) Leipzig (Teubner) 1892; weiterhin als „Mod.“ II citiert.

als Doppelintegral so schreiben:

$$\prod_{\xi,\eta}^{x,y} = \int_y^x \int_\eta^\xi \frac{\Psi(z,z')}{(z_1 z_2' - z_2 z_1')^2} d\zeta_z d\zeta_{z'},$$

wobei $d\zeta$ das homogene Differential:

$$d\zeta = z_1 dz_2 - z_2 dz_1 = -z_2^2 dz$$

ist. Die Integrationslinie von y nach x heiße l, diejenige von η nach ξ aber λ; diese Linien sollen weder die Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, noch auch sich gegenseitig treffen. Um $\prod$ als Function von x zu betrachten, füge man den bisherigen Schnitten noch einen längs λ geführten Einschnitt hinzu. Auf der so zerschnittenen Fläche ist alsdann $\prod$ eine eindeutige Function von x, deren Werte längs der Schnitte folgende constante Differenzen zeigen:

λ	$a_1, a_2, \ldots, a_p$	$b_1, \ldots, b_p$
$-2i\pi$	$0, 0, \ldots, 0$	$2i\pi j_1^{\xi,\eta}, \ldots, 2i\pi j_p^{\xi,\eta}$

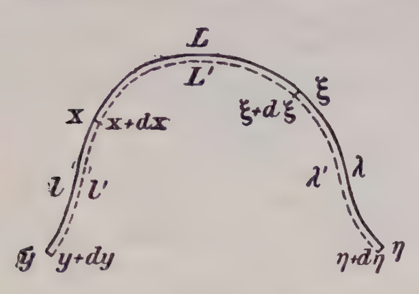
Es ist hier jedesmal der Ueberschuß des Functionswertes am rechten Ufer über den gegenüberliegenden Wert gemeint. Die $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sind die zum kanonischen Querschnittsystem gehörigen Normalintegrale erster Gattung; der Integrationsweg von η nach ξ ist λ (cf. „Mod.“ I pg. 530). Das vorgelegte Integral $\prod$ gestattet „Vertauschung von Parameter und Argument.“ Zu der dem Integral $\prod$ zugehörigen Klein'schen Primform $\Omega(x, y)$ gelangen wir jetzt vermöge der Formel (8) oder (9) in „Mod.“ II pg. 505[1]), von denen wir etwa die erste hier reproducieren:

$$\Omega(x,y) = \sqrt{-d\zeta_x d\zeta_y e^{-\prod_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}}$$

Man hat sich hierbei vorzustellen, daß die Integrationsbahnen von y nach x und von $y+dy$ nach $x+dx$ dicht neben einander herlaufen. Von den Eigenschaften der Primform $\Omega(x, y)$, welche „Mod.“ II pg. 505 genannt sind, erinnern wir insbesondere an folgende: Sie ist als Function von x auf der Fläche überall stetig; an Nullpunkten besitzt sie einen solchen der ersten Ordnung an der Stelle y und im einzelnen Verzweigungspunkte einen solchen der Ordnung $\frac{1}{2}(\nu-1)$, falls ν die Anzahl der dortselbst zusammenhängenden Blätter ist.

1) Daselbst ist P statt Ω geschrieben.

Den Uebergang von der Klein'schen Primform $\Omega(x, y)$ zur Ritter'schen $P(x, y)$ vermittelt folgende Betrachtung. Auf der zerschnittenen Fläche markiere man vier Stellen y, x, ξ, η und führe eine Linie von y über x und ξ nach η, welche weder sich selbst trifft, noch irgendwo das System der Schnitte $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ erreicht. Diese Linie ist in der beigefügten Figur stark ausgezogen; ihren von y nach x verlaufenden Teil nennen wir sogleich wieder l,



den ξ und η verbindenden Teil aber λ. Die daneben punktierte Bahn sei ein Bild der von $y+dy$ über $x+dx$ und $\xi+d\xi$ nach $\eta+d\eta$ führenden Linie, welche überall neben der ersteren Linie herläuft. Die x und ξ verbindende Linie heiße L; die punktierten Linien mögen in sofort verständlicher Zuordnung l', λ' L' genannt werden.

Man bilde nun folgende Summe S von Integralen dritter Gattung, bei denen man, wenn man will, die $dx, dy, d\xi, d\eta$ zunächst als endliche Größen ausreichend kleiner Beträge ansehen kann:

$$S = \Pi_{x,\,\eta}^{x+dx,\ \eta+d\eta} + \Pi_{y,\,\xi}^{y+dy,\ \xi+d\xi} - \Pi_{x,\,\xi}^{x+dx,\ \xi+d\xi} - \Pi_{y,\,\eta}^{y+dy,\ \eta+d\eta}.$$

Für die beiden in jedem Gliede auszuführenden Integrationen sollen die in der Figur vorgeschriebenen Curven Verwendung finden. Im ersten Gliede würde also von η über λ und L bis x zu integrieren sein, sowie andrerseits von $\eta+d\eta$ über λ' und L' bis $x+dx$. Im ersten Integral von S zerlegen wir die von η nach x führende Integrationscurve in die Bestandteile λ und L; ebenso möge für das letzte Integral die von η nach y führende Curve in die beiden Bestandteile λ und $L+l$ verlegt werden:

$$S = \Pi_{x,\,\xi}^{x+dx,\ \eta+d\eta} + \Pi_{\xi,\,\eta}^{x+dx,\ \eta+d\eta} + \Pi_{y,\,\xi}^{y+dy,\ \xi+d\xi}$$
$$- \Pi_{x,\,\xi}^{x+dx,\ \xi+d\xi} - \Pi_{\xi,\,\eta}^{y+dy,\ \eta+d\eta} - \Pi_{y,\,\xi}^{y+dy,\ \eta+d\eta}.$$

Hier stimmen bei je zwei unter einander stehenden Integralen die unten stehenden Grenzen (und natürlich auch die correspondierenden Integrationscurven) überein. Durch Zusammenfassung folgt:

$$S = \Pi_{x,\,\xi}^{\xi+d\xi,\ \eta+d\eta} + \Pi_{\xi,\,\eta}^{x+dx,\ y+dy} + \Pi_{y,\,\xi}^{\eta+d\eta,\ \xi+d\xi}.$$

Im letzten Gliede kehre man die Richtungen beider Integrationen gleichzu um, worauf die Zusammenfassung des ersten und dritten Gliedes gelingt:

$$S = \Pi_{x,\,y}^{\xi+d\xi,\ \eta+d\eta} + \Pi_{\xi,\,\eta}^{x+dx,\ y+dy}.$$

Lassen wir jetzt dx, dy, .. unendlich klein werden, so folgt:

$$\lim S = \Pi_{x,\,y}^{\xi,\,\eta} + \Pi_{\xi,\,\eta}^{x,\,y} = 2\Pi_{\xi,\,\eta}^{x,\,y},$$

wo die Integrationen längs λ und l auszuführen sind.

Nun folgt auf der anderen Seite aus der Definition von S:

$$e^S = \frac{e^{-\Pi_{x,\,\xi}^{x+dx,\ \xi+d\xi}} \cdot e^{-\Pi_{y,\,\eta}^{y+dy,\ \eta+d\eta}}}{e^{-\Pi_{x,\,\eta}^{x+dx,\ \eta+d\eta}} \cdot e^{-\Pi_{y,\,\xi}^{y+dy,\ \xi+d\xi}}}.$$

Erweitern wir mit dem Product $d\zeta_x\ d\zeta_\xi\ d\zeta_y\ d\zeta_\eta$ der zu den dx, $d\xi$, dy, $d\eta$ gehörenden homogenen Differentiale, so folgt:

$$e^{\lim S} = e^{2\Pi_{\xi,\,\eta}^{x,\,y}} = \left[\frac{\Omega(x,\xi)\,\Omega(y,\eta)}{\Omega(x,\eta)\,\Omega(y,\xi)}\right]^2,$$

$$\Pi_{\xi,\,\eta}^{x,\,y} = \log\left(\frac{\Omega(x,\xi)\,\Omega(y,\eta)}{\Omega(x,\eta)\,\Omega(y,\xi)}\right).$$

Daß der rechts stehende Logarithmus des Primformquotienten auf unser anfängliches Normalintegral dritter Gattung führte, ist natürlich keineswegs neu. Aber es war nötig, die vorstehende Entwicklung hier auszuführen, weil sowohl für die rechts stehenden Primformen, wie für das links stehende Integral die sämtlichen Integrationswege in eindeutig bestimmter Weise fest liegen sollten. Um noch zu sagen, wie der Logarithmus in der letzten Formel zu bestimmen ist, denken wir x variabel und lassen diese Stelle längs l gegen y wandern. Für $x = y$ wird der Primformquotient gleich 1, und hier ist der Hauptwert 0 des Logarithmus zu nehmen.

Indem wir die Stellen y, ξ, η bez. die homogenen Größen y_1, y_2, ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 festhalten, sehen wir die Stelle x als beweglich an. Da $\log\left(\frac{\Omega(x,\xi)}{\Omega(x,\eta)}\right)$ von $\Pi_{\xi,\,\eta}^{x,\,y}$ nur um eine von x unabhängige Größe abweicht, so wird das Verhalten des Logarithmus vom Primformquotienten $\frac{\Omega(x,\xi)}{\Omega(x,\eta)}$ durch dasjenige des Integrales dritter Gattung unmittelbar angegeben sein. Auf der durch die $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ und λ zer-

schnittenen Fläche ist der Logarithmus von $\Omega(x, \xi) : \Omega(x, \eta)$ eine eindeutige Function von x. Von dieser Function bez. vom Functionszweige $\log\left(\frac{\Omega(x, \xi)}{\Omega(x, \eta)}\right)$ mögen wir durch einen ganz beliebigen geschlossenen Umlauf der Stelle x auf der Riemann'schen Fläche zu $\overline{\log}\left(\frac{\Omega(x, \xi)}{\Omega(x, \eta)}\right)$ geführt werden. Man hat alsdann einfach:

$$\overline{\log}\left(\frac{\Omega(x, \xi)}{\Omega(x, \eta)}\right) = \log\left(\frac{\Omega(x, \xi)}{\Omega(x, \eta)}\right) + 2i\pi\mu - 2i\pi\sum_{\varkappa=1}^{p}\nu_\varkappa j_\varkappa^{\xi,\eta},$$

wenn der fragliche Umlauf die von η nach ξ gerichtete Linie λ von links nach rechts μ Male öfter überschreitet als von rechts nach links, und wenn der Schnitt $b_\varkappa$ vom Umlauf $\nu_\varkappa$ Male öfter von links nach rechts als umgekehrt überschritten wird.

Wir machen jetzt noch nachträglich die leicht zu befriedigende Annahme, daß unsere Riemann'sche Fläche bei $z_2 = 0$, d. h. bei $z = \infty$ keinen Verzweigungspunkt aufweise. Die m daselbst über einander liegenden Stellen der Fläche mögen durch $\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_m$, eine beliebige unter ihnen durch ∞_h bezeichnet werden. Man nehme nun die Stelle η der Reihe nach mit $\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_m$ dientisch. Man ziehe sogleich von diesen m Stellen aus ebensoviele Schnitte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, welche in ξ zusammenlaufen. Bei vorgelegtem Umlaufe des x heiße die zu λ_h gehörende Zahl μ insbesondere μ_h; die Summe der $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ werde σ genannt. Benutzen wir noch anstatt ξ, um diese Stelle als feststehend zu charakterisieren, die Bezeichnung e (in Uebereinstimmung mit Ritter), und lassen wir an Stelle der Benennung x der variabelen Stelle auf der Fläche die ursprüngliche Benennung z treten, so wird:

$$\overline{\log}\left(\frac{\Omega(z, e)}{\Omega(z, \infty_h)}\right) = \log\left(\frac{\Omega(z, e)}{\Omega(z, \infty_h)}\right) + 2i\pi\mu_h - 2i\pi\sum_{\varkappa=1}^{p}\nu_\varkappa j_\varkappa^{e,\infty_h}.$$

Ehe wir weiter gehen, möge darauf hingewiesen werden, daß sich im Quotiente $\Omega(z, e) : \Omega(z, \infty_h)$ die Nullpunkte, welche Zähler und Nenner einzeln in den Verzweigungspunkten aufweisen, gerade fortheben. Es restiert nur ein einziger Nullpunkt bei $z = e$ und ein einziger Pol bei $z = \infty_h$, beide von der ersten Ordnung. Da nun z_2 im ganzen m bei $\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_m$ gelegene Nullpunkte erster Ordnung hat, so gewinnen wir in:

$$\sqrt[m]{\frac{z_2\,\Omega(z, e)^m}{\prod_{h=1}^{m}\Omega(z, \infty_h)}} = \Omega(z, e)\sqrt[m]{\frac{z_2}{\prod_{h=1}^{m}\Omega(z, \infty_h)}} = P(z, e)$$

eine allenthalben stetige Form der Dimension $\frac{1}{m}$, die abgesehen von dem einen Nullpunkte erster Ordnung an der Stelle e überall von null verschieden ist.

Hiermit haben wir nun im wesentlichen die Ritter'sche Primform erreicht[1]). Indem wir die vorletzte Formel für $h = 1, 2, \ldots, m$ bilden, alle m Gleichungen addieren und das Resultat durch m teilen, folgt:

$$\overline{\log}\left(\frac{P(z, e)}{\sqrt[m]{z_2}}\right) = \log\left(\frac{P(z, e)}{\sqrt[m]{z_2}}\right) + 2i\pi\frac{\sigma}{m} - 2i\pi\sum_{\varkappa=1}^{p}\nu_\varkappa W_\varkappa^z.$$

Hierbei haben wir zur Abkürzung das Integral erster Gattung:

$$W_\varkappa^z = \frac{1}{m}(j_\varkappa^{z,\,\infty_1} + j_\varkappa^{z,\,\infty_2} + \cdots + j_\varkappa^{z,\,\infty_m})$$

eingeführt, und es ist $W_\varkappa^z$ vermöge der Integrationscurve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ eindeutig definiert.

Bei Ausführung des Umlaufs der Stelle z werden wir die homogenen Variabelen z_1, z_2 beide veränderlich annehmen; und zwar sollen sie schließlich wieder zu ihren Anfangswerten zurückkehren. Beschreibt dabei die Variabele z_2 in ihrer Ebene eine solche Bahn, die sich auf τ im positiven Sinne gemeinte Umläufe um den Nullpunkt $z_2 = 0$ zusammenziehen läßt, so ist:

$$\overline{\log}(\sqrt[m]{z_2}) = \log(\sqrt[m]{z_2}) + 2i\pi\frac{\tau}{m};$$

natürlich kann hierbei τ auch eine negative ganze Zahl sein. Dem geschlossenen Umlaufe des Variabelenpaares z_1, z_2 entspricht alsdann folgende Abänderung des Logarithmus der Ritter'schen Primform $P(z, e)$:

$$\overline{\log}\,P(z, e) = \log P(z, e) + 2i\pi\frac{\sigma+\tau}{m} - 2i\pi\sum_{\varkappa=1}^{p}\nu_\varkappa W_\varkappa^z,$$

wenn (um es zu wiederholen) der Umlauf z die Schnitte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ insgesamt σ Male öfter von links nach rechts als von rechts nach links überschreitet und desgleichen den Schnitt $b_\varkappa$ von links nach rechts $\nu_\varkappa$ Male öfter als in der entgegengesetzten Richtung,

1) Ritter setzt noch einen constanten Factor hinzu, der jedoch für das Periodenverhalten unwesentlich ist.

und wenn endlich τ die Anzahl einfacher Umläufe von z_2 im positiven Sinne um den Nullpunkt $z_2 = 0$ darstellt.

Dies ist aber das Ergebnis des Teiles I der oben genannten Ritter'schen Abhandlung, wobei hier der Gebrauch der „transcendent normierten" Primform eine noch etwas mehr specificierte Fassung des Resultates gestattete.

Ueber die Principe von Hamilton und Maupertuis.

Von

A. Voss in Würzburg.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 28. Juli 1900.

Die Bedeutung des Principes der kleinsten Wirkung, wie es von Lagrange ausgesprochen wurde, ist bekanntlich lange Zeit zweifelhaft geblieben, obwohl bereits Ostrogradsky die allgemeinen Variationsprincipe bei den isoperimetrischen Problemen aufgestellt hat. Herrn Hölder gebührt das Verdienst, die Frage völlig klar gelegt zu haben, zu deren erneuter Behandlung die Untersuchungen von Hertz und Helmholtz Veranlassung gegeben hatten. Wenn ich auf die Arbeit von Herrn Hölder[1]), der den Zusammenhang des Principes der kleinsten Wirkung mit dem „Hamilton'schen Princip“ und die Natur der dabei anzustellenden Variationsbetrachtungen ausführlich dargelegt hat, hier zurückkomme, so geschieht es nicht, um derselben etwas für die principielle Frage selbst wesentliches hinzuzufügen. Aber die Anwendung dieses Gedankenganges auf den Fall ganz allgemeiner Coordinaten erfordert einige Ueberlegungen, die sich in seiner Arbeit nicht finden, in der nur Coordinaten, die explicite von der Zeit unabhängig sind, benutzt werden. Sie auszuführen, ist vielleicht nicht ganz überflüssig. Ich werde zu diesem Zwecke zuerst Hölders Gedankengang in einer etwas andern Form reproduciren[2]), und dann

1) A. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis, Gött. Nachr. 1896, Heft 2, p. 1—36.

2) Die Anwendung der Coordinaten q_i ist übrigens schon bei Hölder angedeutet, a. a. O. p. 14 Anm.

denselben bei Zugrundelegung ganz allgemeiner Coordinaten darlegen.

§ 1.

Die Hölder sche Formulirung der Principe von Hamilton und Maupertuis.

Es sei ein Problem der Mechanik vorgelegt, bei dem die Coordinaten x, y, z durch von der Zeit unabhängige Bedingungen, welche auch zum Teil die Form von linearen Differentialgleichungen besitzen können, gegeben; ferner T die lebendige Kraft,

$$\delta' U = \sum X_h \delta x_h + Y_h \delta y_h + Z_h \delta z_h$$

die virtuelle Arbeit der wirkenden Kräfte.

Alsdann kann man die endlichen Bedingungsgleichungen vermöge der Coordinaten q_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ erfüllen, wodurch T in eine homogene Function zweiten Grades der q_i', $\delta' U$ in

$$1) \qquad \delta' U = \sum_i Q_i \delta q_i$$

übergeht, während zwischen den q_i noch die weiteren Differentialgleichungen

$$2) \qquad \sum_s p_{ki} dq_i = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots, n$$

bestehen.

Erteilt man den t, q_i solche Variationen, daß die Verschiebungen P' der Systempunkte P den Werten $t + \delta t$, $q_i + \delta q_i$ entsprechen, also δq_i, δt die Variationen zur Zeit t sind, bei denen die ursprünglichen Coordinaten x_h, y_h, z_h willkürliche virtuelle Verschiebungen δx_h, δy_h, δz_h erhalten, so ist nach bekannten Methoden[1]):

$$\delta T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \left(\frac{\delta d q_i}{dt} - q_i' \frac{\delta dt}{dt} \right)$$

also

$$dt\, \delta T + 2T \delta dt = dt \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta d q_i\, dt + \left(2T - \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta dt$$

oder, falls das letzte Glied nach dem Satze der homogenen Functionen fortgelassen und das zweite bei der Integration über die Zeit $t_1 - t_0$ durch partielle Integration transformirt wird

1) Vgl. Hölder p. 9.

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta T + 2T\delta dt = \left|\sum \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i\right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta q_i\,dt$$

d. h. wenn man beiderseits

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta' U dt$$

hinzufügt und das vom $\int$ Zeichen - freie Glied rechts fortläßt, nach 1)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\delta T + 2T\delta dt + \delta' U dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)dt\delta q_i.$$

Wird jetzt die Zeit unvariirt gelassen, so folgt

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta' U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta q_i\,dt$$

und die Forderung, daß das Hamilton'sche Integral verschwindet, liefert die Differentialgleichungen der Mechanik

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_0^r \lambda_s p_{si}$$

und umgekehrt.

Wird aber die Zeit variirt, dagegen für das Verhalten der Energie die Hölder'sche Bedingung

$$\delta T - \delta' U = 0$$

in Rücksicht auf die Bedingungen 2) eingeführt, so ergiebt sich

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta q_i\,dt,$$

so daß auch das erweiterte Princip der kleinsten Wirkung[1]) mit den Differentialgleichungen der Mechanik völlig äquivalent ist.

§ 2.

Der Fall allgemeiner Coordinaten.

Es seien jetzt die endlichen Bedingungsgleichungen auch explicite von der Zeit abhängig. Wenn man sich von ihnen mit-

1) Vgl. Hölder p. 11.

telst der Coordinaten q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ befreit, also die x_h, y_h, z_h gleich Functionen der t, q_i setzt, werden auch die Bedingungsdifferentialgleichungen, selbst wenn sie vorher t explicite nicht als Differential oder als Argument enthielten, von der Form

$$1) \qquad \sum p_{ks} dq_s + p_k dt = 0 \qquad k = 1, \ldots, \nu$$

wo nunmehr die p_{ks}, p_k Functionen von q_i, t sind, so daß also dieser allgemeine, von mir bereits [1]) 1884 betrachtete Fall hier vorauszusetzen ist. Zugleich wird T eine Function zweiten Grades der q_i' [2]).

Erteilt man jetzt den x_h, y_h, z_h dadurch Variationen, daß man die q_i, t um δq_i, δt ändert, so ändern sich die x_h um

$$\delta x_h = \sum \frac{\partial x_h}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial x_h}{\partial t} \delta t$$

während

$$\frac{dx_h}{dt} = \sum \frac{\partial x_h}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial x_h}{\partial t}$$

ist. Bei der Anwendung des d'Alembert'schen Principes sind aber lediglich virtuelle Verschiebungen $\delta' x_h$, $\delta' y_h$, $\delta' z_h$ anzuwenden. In Berücksichtigung der Gleichung

$$\delta x_h - x_h' \delta t = \sum \frac{\partial x_h}{\partial q_i} (\delta q_i - q_i' \delta t)$$

sieht man jetzt, daß bei dieser Betrachtung [3]) die virtuellen Verschiebungen δ' den Werten

$$2) \qquad \delta' q_i = \delta q_i - q_i' \delta t$$

entsprechen, so daß

$$\delta' x_h = \sum \frac{\partial x_h}{\partial q_i} \delta' q_i$$

wird. Aus der Gleichung 2) folgt noch, wenn man t um dt, q_i um dq_i zunehmen läßt:

$$3) \qquad \delta' dq_i = \delta dq_i - q_i' \delta dt - q_i'' \delta t\, dt.$$

Man erhält nun ganz wie vorhin

---

1) A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25, p. 258.

2) Diese besondere Form von T ist für das Folgende ganz gleichgültig.

3) Vgl. eine diesbezügl. Bemerkung von J. Routh, Dynamik, Bd. II p. 329.

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\delta T + 2T\delta dt = \left| \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial T}{\partial t} \delta t$$

$$+ \int \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(2T - \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta dt$$

oder, wenn das letzte Integral durch partielle Integration behandelt wird,

$$= \left| \sum 2T dt + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right|_{t_0}^{t_1}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i - \frac{d}{dt} \left(2T - \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta t \right) dt.$$

Berücksichtigt man nun, daß

$$\frac{d}{dt} \left(2T - \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) = 2 \frac{\partial T}{\partial t} + 2 \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i' + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i'' - \sum q_i' \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right)$$

wird, so entsteht, wenn man beiderseits das Integral

$$\int \delta' U dt = \int \sum Q_i \delta' q_i dt$$

addirt, den vom Integral freien Teil rechts durch Verfügung über die Variationen zu Anfang und Ende der Zeit fortläßt, die Gleichung

4) $$\int dt \delta T + 2T \delta dt + dT \delta t + \delta' U dt = \int \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} + Q_i \right) \delta' q_i dt$$

und aus 1) folgt noch

$$\sum p_{ki} q_i' + p_k = 0$$

$$\sum p_{ki} \delta q_i + p_k \delta t = 0$$

oder nach 2):

$$\sum p_{ki} \delta' q_i = 0$$

als Ausdruck für die Bedingungen, denen die virtuellen Verschiebungen zu unterwerfen sind.

Wird nun δt gleich Null gesetzt, so ergiebt sich links wieder die Hamilton'sche Integralbedingung als äquivalent mit den Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} + Q_i = \sum_1^r \lambda_k p_{ki}.$$

Setzt man andererseits für die Beziehung, die der Energie bei der variirten Bewegung auferlegt wird

5) $$\delta' U dt + dT\delta t = \delta T dt,$$

so folgt das erweiterte Princip der kleinsten Wirkung. Die Bedingung 5) ist noch umzuformen.

Es ist

$$\delta t dT = \delta t \left[\frac{\partial T}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i' dt + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i'' dt\right]$$

$$dt\delta T = dt \left[\frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} \frac{\delta d q_i - q' \delta dt}{dt}\right]$$

oder nach 5) und 3) bei geeigneter Bezeichnung

$$\delta' U = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta' q_i'\right),$$

so daß also auch hier bei der virtuellen Verschiebung die totale Energie nicht geändert wird, da die letzte Gleichung auch in der Form

$$\delta' (T - U) = 0$$

geschrieben werden kann. Hiermit ist aber die betreffende Untersuchung auch im allgemeinsten Falle völlig durchgeführt.

Würzburg, im Juli 1900.

Ueber die Leitfähigkeit fester Mischungen bei hohen Temperaturen.

Von

W. Nernst und H. Reynolds.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Juli 1900.

Wie der Eine von uns[1]) gefunden hat, nehmen Mischungen fester Electrolyte bei hohen Temperaturen eine überraschend große Leitfähigkeit an; im Folgenden sei die Methode beschrieben, die wir zur Untersuchung dieser electrolytischen Leitfähigkeit ausgearbeitet haben.

Die Substanz wird fein gepulvert in Form dünner Stifte gepreßt, stark gebrannt und in einem electrischen Platinofen auf Temperaturen bis zu 1400° erhitzt. Der Widerstand wird nach der Kohlrausch'schen Methode bestimmt.

Der Platinofen besteht im wesentlichen aus einem dünnen Rohr aus Magnesia, die mit 10% Speckstein versetzt ist; dasselbe wird außen mit Platindraht bewickelt und hierauf mit einem Gemisch von Magnesia und Speckstein bestrichen. Zum weiteren Wärmeschutze ist der Ofen von einem Thonmantel (in der Fig. 1 weggelassen) umgeben. Zur Bestimmung der Temperatur dient ein von unten eingeführtes Thermoelement.

Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 1; um die Uebergangswiderstände zwischen Stift und den angelegten Platindrähten zu eliminieren, wird derselbe an zwei 1 mm dicken Stäben, die an ihrem Ende platt geschlagen und mit einem Loche versehen sind,

---

1) W. Nernst, Zeitschr. f. Electrochemie, 6, 41 (1899). Vergl. auch C. Fritsch. Wied. Ann. 60, 300 (1897), welcher electrolytische Leitfähigkeiten von Salzen und deren Mischungen bis zu 200° untersucht hat.

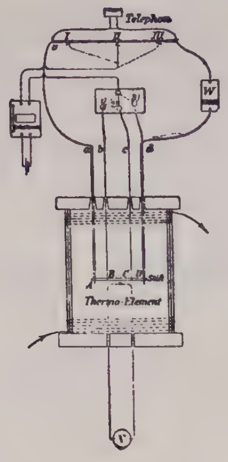


Fig. 1.

suspendirt und mittels zweier Platin-Iridiumdrähte in die Höhe gezogen und gegen die Stäbe gedrückt. Die Widerstände werden mittels einer Brückenwalze an den 3 Stellen 1, 2, 3 gemessen, sodaß für den Widerstand des Stückes BC folgt

$$w = \frac{l_2 - l_1}{1000 - l_3} W,$$

wenn l_1, l_2, l_3 die Ablesungen an der Brücke in den drei Punkten I, II, III bedeuten. W ist ein nach Chaperon gewickelter Widerstand von 10000 Ohm. Die specifische Leitfähigkeit (reziproker Widerstand in Ohm eines cm-Würfels) wurde in bekannter Weise aus der Länge des Stückes BC (gewöhnlich ca. 1 cm) der mikrometrisch gemessenen Dicke der Stäbchen (ca. 1 mm) und dem Widerstande w berechnet.

Stifte aus reinen Substanzen wiesen einen außerordentlich großen Widerstand auf; so berechnet sich die Leitfähigkeit von MgO bei 1500° zu 0.000085, von Zirkon bei 1200° zu 0.00081; Y_2O_3 isolierte bei 1040° noch vollständig und hatte bei 1320° nur eine Leitfähigkeit von 0,082. Reines Porzellan hat bei ca. 1000° eine Leitfähigkeit von 3.10^{-6}, leitet also ebenfalls außerordentlich schlecht. Sobald man aber Gemische herstellt, erhält man relativ gute Leitfähigkeiten, und wir haben demgemäß das Problem in Angriff genommen, den Einfluß verschiedener Zusätze (10—15%) zu einer gleichsam als Lösungsmittel dienenden Grundsubstanz näher zu untersuchen. Das Beobachtungsmaterial findet sich auf beiliegender Kurventafel aufgetragen.

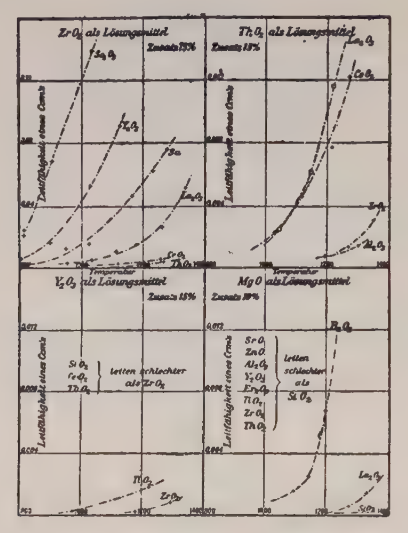


Fig. 2.

Zunächst fällt die allgemeine Erscheinung in die Augen, daß bei einer ziemlich genau zu bestimmenden Temperatur die Leitfähigkeit stark beschleunigt ansteigt, der Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit in diesem Gebiete also relativ beträchtliche Werte annimmt. Ferner kann man mindestens im großen und ganzen die Regel aufstellen, daß die Leitfähigkeit von Gemischen chemisch nahestehender Stoffe sehr gering ist. So leiten Gemische aus den Oxyden des Thors, Zirkons und Cers sehr schlecht, ebenso Gemische aus Yttrium und Erbium; hingegen entstehen durch Mischung dieser beiden verschiedenen Körpergruppen relativ gutleitende Substanzen.

In einer Gruppe verwandter Oxyde steigt ferner die Leitfähigkeit des Gemisches mit abnehmendem Atomgewichte; so nimmt die Leitfähigkeit der Zirkonstifte in der Reihe Lanthan, Yttrium, Scandium zu; die Leitfähigkeit der Yttriumstifte wächst in der Reihenfolge Cer, Zirkon, Titan.

Ueber die Influenz ferromagnetischer Krystalle, insbesondere über die P. Weiß'schen Beobachtungen am Magnetit.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. October 1900.

In den meisten Gebieten der Krystallphysik lassen sich die Erscheinungen befriedigend darstellen, wenn man die Bestimmungsstücke des secundären, bewirkten Zustandes (z. B. die Deformationsgrößen in einem elastischen Krystall) als homogene lineäre oder quadratische Functionen der Parameter des primären, ursächlichen Zustandes (z. B. der Druckcomponenten) ansetzt. Hierauf beruht die relative Einfachheit, welche (neben der außerordentlichen Mannigfaltigkeit) jene Gebiete auszeichnet.

Eine seit langem bekannte Ausnahme bietet die thermische Dilatation, bei welcher selbst in mäßigen Temperaturbereichen der Ansatz der Deformationsgrößen als lineärer Functionen der Temperatur sich als ungenügend erweist. Aber der Vorgang ist ein so einfacher, daß die Erweiterung jenes Ansatzes durch höhere Potenzen der Temperatur nur wenig neue Gesetzmäßigkeiten von Belang liefert. In der That werden dadurch die Symmetrieverhältnisse des Vorganges nur in dem monoklinen und dem triklinen Systeme geändert und zwar nicht eben in einer eingreifenden Weise. Andere Ausnahmen sind meines Wissens bisher nicht eingehend untersucht worden. Unter diesen Umständen erschien es mir lohnend, ein Gebiet zu behandeln, in welchem stets, wenn die lineär-homogenen Beziehungen versagen, eine tiefgreifende Veränderung der Symmetrieverhältnisse Platz

greift, nämlich die (magnetische) Influenz ferromagnetischer Krystalle.

Unter den bezüglichen Beobachtungen, über die Herr Du Bois in seinem Referat über „die magnetischen Eigenschaften der ponderabeln Materie" dem diesjährigen internationalen Physikercongreß in Paris berichtet hat, sind die von Herrn P. Weiß[1]) am regulär krystallisirenden Magnetit (Fe_3O_4) angestellten so ausführlich, daß sie die Anwendung der Theorie, wenngleich nach der Gesammtlage unserer Kenntniß der Gesetze des Ferromagnetismus nur in beschränktem Umfange, gestatten. Es läßt sich ohne Schwierigkeit der quantitative Zusammenhang einer Reihe von bei jenen aufgefundenen Thatsachen und in Annäherung auch ihr quantitatives Gesetz theoretisch entwickeln. Da andere ausführliche Beobachtungen nicht vorliegen, so werde ich mich nach Entwicklung der allgemeinen Gesichtspunkte auf die Behandlung der Krystalle des regulären Systemes und insbesondere auf die Theorie der Weiß'schen Beobachtungen beschränken.

1) Bezeichnen wir mit a, b, c die Componenten des influenzirten magnetischen Momentes m der Volumeneinheit, mit A, B, C die Componenten der gesammten magnetischen Feldstärke nach den Coordinatenaxen, so sind die gewöhnlichen (lineären) Beziehungen des Krystallmagnetismus, die bei der Voraussetzung der Hauptmagnetisirungsaxen die Form

$$1) \qquad a = k_{\text{I}} A, \quad b = k_{\text{II}} B, \quad c = k_{\text{III}} C$$

annehmen, (unter den k die Susceptibilitäten verstanden) bei ferromagnetischen Krystallen nicht mehr gültig. Die Momente sind nicht mehr der Feldstärke proportional und überhaupt nicht mehr durch deren augenblicklichen Werth allein bedingt, sondern hängen auch von deren früherem Verlauf ab. Letzterer Umstand, insbesondere die sog. Hysteresis, complicirt die Erscheinungen außerordentlich; man kann sie vermeiden, indem man der Theorie zunächst einen Idealzustand unterwirft, bei dem die inneren Reibungskräfte, welche die Hysterese bedingen, gleich Null gesetzt werden. Den Verlauf der unter diesen Umständen eintretenden Erscheinung kann man dann in großer Annäherung durch die Mittellinie der bis zu beliebig hohen Feldstärken beobachteten Hysteresis-Cyklen dargestellt denken und wird dabei um so weniger Unsicherheiten ausgesetzt sein, je enger diese Cyklen sind. Bei gewissen Varietäten des von Herrn P. Weiß beob-

1) P. Weiß, Thèses pres. à la Fac. d. Sciens. de Paris, 1896.

achteten Magnetit sind die Cyklen so eng, daß sie nach ausdrücklicher Angabe bei den uns weiterhin besonders interessirenden Beobachtungen an Kreisscheiben überhaupt keine merkliche Wirkung übten.

Der geometrische Verlauf dieses idealen magnetischen Momentes m, als Function der äußern Feldstärke H dargestellt, ist nun nach der Beobachtung krummlinig, bei kleinen Feldstärken mit starker Annäherung an die Gerade. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf centrisch-symmetrische Krystalle, bei denen positive und negative Richtungen von H entgegengesetzt gerichtete Momente bewirken, so bietet sich für die Componenten a, b, c von m ein Ansatz, der nach ungeraden Potenzen der Componenten A, B, C von H fortschreitet. Wir wollen ihn zunächst in der symbolischen Form darstellen

$$2)\qquad a = A(k_{\mathrm{I}} + D(A^2, B^2, C^2)), \quad b = B(k_{\mathrm{II}} + E(A^2, B^2, C^2)),$$
$$c = C(k_{\mathrm{III}} + F(A^2, B^2, C^2)),$$

worin D, E, F Reihen darstellen die, mit Gliedern zweiten Grades beginnend, nach geraden Potenzen der A, B, C fortschreiten.

Es bietet keine Schwierigkeiten diese Reihen durch Einführung der Symmetrieelemente für die einzelnen Krystallgruppen zu specialisiren. Für unsern nächsten Zweck genügt es, die Formeln aufzustellen, die speciell für das reguläre System gelten und lauten:

$$3)\qquad \begin{aligned} a &= A(k - k_1 A^2 - k_2 H^2 - k_3 A^4 - k_4 A^2 H^2 - k_5 H^4 \ldots), \\ b &= B(k - k_1 B^2 - k_2 H^2 - k_3 B^4 - k_4 B^2 H^2 - k_5 H^4 \ldots), \\ c &= C(k - k_1 C^2 - k_2 H^2 - k_3 C^4 - k_4 C^2 H^2 - k_5 H^4 \ldots); \end{aligned}$$

hierin sind $k, k_1, k_2, \ldots$ Constanten, von denen nach den Beobachtungen die k_h solche Werthe haben, daß das erste Glied jeder Klammer bei mäßigen Feldstärken die folgenden erheblich überwiegt.

Die Formeln (3) zeigen:

Bei Erweiterung der Magnetisirungsformeln des regulären Systemes durch Heranziehung höherer Glieder verlieren sie den Character der Isotropie, welcher der ersteren Annäherung eignet. —

Auf eine einfache Beziehung eines anderen Gebietes der Krystallphysik zu dem hier behandelten mag im Voraus hingewiesen werden. Beschränkt man sich in dem Ansatz (3) auf die Glieder erster Ordnung oder dritten Grades und bildet das Moment

$$l = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

nach der Richtung der Kraftlinien, wobei $\alpha = A/H$, $\beta = B/H$, $\gamma = C/H$ deren Richtungscosinus sind, so erhält man

$$l = (kH - k_2 H^3) - kH^3(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4).$$

Betrachtet man die Abhängigkeit dieses Ausdrucks bei constanter Stärke H nur allein von der Richtung des Feldes, so erhält man dasselbe Gesetz, welches für den Modul der longitudinalen Dilatation eines aus einem regulären Krystall geschnittenen Cylinders gilt [1]). Analoges gilt für andere centrisch-symmetrische Krystallgruppen.

Obwohl nun weder die vorgenommene Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung, noch die Identificirung der inneren Feldstärke H mit der von außen ausgeübten zulässig ist, so darf man aus dem erhaltenen Resultate doch schließen, daß zwischen dem Gesetze des beobachtbaren longitudinalen Momentes und dem des elastischen Dehnungsmoduls eine beträchtliche Aehnlichkeit bestehen wird. Diese Aehnlichkeit ist bei den Weiß'schen Beobachtungen bereits von Herrn Du Bois bemerkt worden. —

Die Darstellung der Momente a, b, c durch Potenzreihen hat auf den ersten Blick etwas Unbefriedigendes; es ist mehr als wahrscheinlich, daß diese Reihen bei einigermaßen bedeutenden Feldstärken sehr schlecht convergiren werden, und man wird nach dem Verlauf, den die Beobachtungen zeigen, mehr geneigt sein, andere (etwa gebrochene oder Exponential-)Functionen zu ihrer Darstellung heranziehen. Z. B. würde ein Ansatz von der Form

$$a = \frac{A}{p + \sqrt{q^2 H^2 + r^2 A^2}},$$
$$b = \frac{B}{p + \sqrt{q^2 H^2 + r^2 B^2}},$$
$$c = \frac{C}{p + \sqrt{q^2 H^2 + r^2 C^2}},$$

in dem p, q, r Constanten sind, den Symmetrieeigenschaften centrischer regulärer Krystalle und zugleich befriedigend den Weiß'schen Beobachtungen entsprechen.

Indessen bieten dergleichen Ausdrücke bei der Behandlung, wie bei der Discussion der Resultate mancherlei Unbequemlichkeiten dar, sodaß ich mich umsomehr für die oben erörterte Behandlungsweise entschieden habe, als es ja jederzeit möglich ist, durch Operiren mit kleinen Feldstärken die Convergenz der

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg. Bd. 7, S. 5, 1875.

Reihen zu verbessern und eine Beschränkung auf eine sehr kleine Zahl von Gliedern zu ermöglichen.

2) Bei ferromagnetischen Krystallen ist es wegen der erheblichen Susceptibilitäten, die bei Magnetit z. B. in der Nähe von 10 liegen, nicht erlaubt, von der Selbstinfluenz abzusehen. Man wird daher der Beobachtung passend solche Präparate unterwerfen, für welche die strenge Theorie der Influenz durchführbar ist, also Ellipsoide, — im Grenzfall Kugeln, dünne Kreiscylinder und dünne Kreisscheiben. Daß für das Ellipsoid auch mit den erweiterten Magnetisirungsformeln (2) derselbe Weg zum Ziele führt, der dies mit den einfachen Ansätzen (1) leistet, ist leicht erkennbar.

Das Potential $\psi = \int \frac{dv_1}{r}$ eines homogenen Ellipsoides von der Dichte Eins, dessen Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, auf einen innern Punkt x, y, z hat bis auf eine irrelevante additive Constante bekanntlich die Form:

$$\psi = -\tfrac{1}{2}(Mx^2 + Ny^2 + Pz^2),$$

worin M, N, P Functionen allein der Axenlängen darstellen. Die Kraft, welche der innere Punkt erfährt, hat also die Componenten:

$$X = Mx, \quad Y = Ny, \quad Z = Pz.$$

Das Potential φ desselben homogen magnetisirten Ellipsoides folgt hieraus, wenn a, b, c wie oben seine specifischen Momente bezeichnen, gemäß

$$\begin{aligned}\varphi &= a\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} dv_1 + b\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} dv_1 + c\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} dv_1 \\ &= -a\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dv_1}{r} - b\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{dv_1}{r} - c\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{dv_1}{r}, \\ &= +(aX + bY + cZ)\end{aligned}$$

zu

4) $$\varphi = +aMx + bNy + cPz.$$

Hieraus ergeben sich für die von dem magnetisirten Ellipsoid auf einen innern Punkt ausgeübten Kräfte die Werthe:

5) $$A' = -aM, \quad B' = -bN, \quad C' = -cP,$$

und bei Einwirkung einer äußeren Feldstärke $R_0(A_0, B_0, C_0)$ die Gesammtcomponenten:

6) $$A = A_0 - aM, \quad B = B_0 - bN, \quad C = C_0 - cP.$$

Gelten nun für die Substanz des Ellipsoides die Magnetisirungsformeln (2), (wobei wir hier der Einfachheit halber die unwesentliche Beschränkung machen, daß die Ellipsoidaxen zugleich Hauptmagnetisirungsaxen der Substanz sind) so kann man in sie die Beziehungen (6) einsetzen und darnach aus ihnen die gesuchten Momente a, b, c bestimmen. Die betreffende Rechnung wird sehr einfach, wenn man die Ergänzungsglieder D, E, F als klein neben den $k_{\mathrm{I}}, k_{\mathrm{II}}, k_{\mathrm{III}}$ ansehen und in sie für A, B, C die Annäherungswerthe einführen darf, die sich aus (2) und (6) bei Vernachlässigung jener Glieder ergeben, nämlich

$$a = k_{\mathrm{I}}(A_0 - aM), \quad b = k_{\mathrm{II}}(B_0 - bN), \quad c = k_{\mathrm{III}}(C_0 - cP)$$

oder

$$7) \qquad a = \frac{k_{\mathrm{I}} A_0}{1 + k_{\mathrm{I}} M}, \quad b = \frac{k_{\mathrm{II}} B_0}{1 + k_{\mathrm{II}} N}, \quad c = \frac{k_{\mathrm{III}} C_0}{1 + k_{\mathrm{III}} P}.$$

Hierdurch wird dann in gleicher Annäherung

$$8) \quad A = \frac{A_0}{1 + k_{\mathrm{I}} M} = M_0 A_0, \quad B = \frac{B_0}{1 + k_{\mathrm{II}} N} = N_0 B_0, \quad C = \frac{C_0}{1 + k_{\mathrm{III}} P} = P_0 C_0,$$

wobei M_0, N_0, P_0 Abkürzungen sind, und unsere Formeln (2) nehmen die Gestalt an:

$$9) \qquad \begin{aligned} a &= M_0 A_0 (k_{\mathrm{I}} + M_0 D(M_0^2 A_0^2, N_0^2 B_0^2, P_0^2 C_0^2)), \\ b &= N_0 B_0 (k_{\mathrm{II}} + N_0 E(M_0^2 A_0^2, N_0^2 B_0^2, P_0^2 C_0^2)), \\ c &= P_0 C_0 (k_{\mathrm{III}} + P_0 F(M_0^2 A_0^2, N_0^2 B_0^2, P_0^2 C_0^2)). \end{aligned}$$

Sind D, E, F durch Reihen dargestellt, so kann man die Genauigkeit des Resultates durch Wiederholung dieses Annäherungsverfahren in bekannter Weise steigern. Wir wollen, da es sich vorläufig noch nicht um eine zahlenmäßige Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung handelt, hiervon absehen. —

Die strengen Formeln für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid von der Gleichung

$$10) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\mathsf{A}^2} + \frac{z^2}{\Gamma^2} = 1$$

geben bekanntlich

$$11) \qquad \begin{aligned} M = N &= \frac{2\pi}{\lambda^3} \left[(1 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda - \lambda\right], \\ P &= 4\pi \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} (\lambda - \operatorname{arctg} \lambda), \end{aligned}$$

wobei $\lambda^2 = (A^2 - \Gamma^2)/\Gamma^2$ ist. Uebertrifft hierin A so erheblich Γ daß Γ^2 neben A^2 vernachlässigt werden kann, so ist:

$$\lambda = A/\Gamma, \text{ arctg } \lambda = \tfrac{1}{2}\pi - 1/\lambda, \text{ also}$$

12) $$M = N = \frac{\pi}{\lambda}\left(\pi - \frac{4}{\lambda}\right), \quad P = 4\pi\left(1 - \frac{1}{2\pi\lambda}\right).$$

Vernachlässigt man gar Γ selbst neben A, so findet sich:

$$M = N = \pi^2/\lambda, \quad P = 4\pi$$

also

$$M_0 = N_0 = \frac{1}{1+\pi^2 k/\lambda}, \quad P_0 = \frac{1}{1+4\pi k}.$$

Hieraus ergeben sich für M_0, N_0 einerseits und P_0 andrerseits unter Umständen sehr verschiedene Größen; bei $\lambda = 60$, $k = 10$ folgt z. B. $M_0 =$ etwa gleich $1/2$, P_0 etwa gleich $1/120$. Dies (bekannte) Resultat ist bei gewissen Fragen im Auge zu behalten.

3) Die Weiß'schen Beobachtungen an Magnetitscheiben sind so angestellt, daß die Scheiben, mit ihrer Ebene parallel zu den Kraftlinien des äußeren Feldes befestigt, in Bezug auf ihre geometrische Axe um gewisse Winkel gedreht wurden, und der hierdurch in einem, die Scheiben nahe meridional umgebenden, ebenen Windungssystem inducirte Integralstrom J gemessen wurde. Da diese Windungen der Scheibe nicht unmittelbar anlagen, so ist die in ihnen bei den Beobachtungen inducirte electromotorische Kraft nicht ohne weiteres zu übersehen, sondern erfordert eine kleine Rechnung, die hier angedeutet werden mag, da das Resultat für die Verwerthung jener Messungen maßgebend ist.

Wir wollen hierbei der Einfachheit halber, da es sich immer nur um eine Annäherung handelt, das Windungssystem als einen elliptischen Ring ansehen, der in einer Meridianebene des magnetisirten Rotationsellipsoides aufgestellt ist und eine zu dem Meridianschnitt desselben confocale Gestalt besitzt. Seine Halbaxen seien A_1, Γ_1, dann ist

13) $$A_1^2 - \Gamma_1^2 = A^2 - \Gamma^2 = \varepsilon^2.$$

Die Kraft, welche ein Rotationsellipsoid von den Axen A_1, Γ_1 und von der Dichte Eins auf einen innern Punkt mit den Coordinaten x, y, z ausübt, hat die Componenten

14) $$X_1 = M_1 x, \quad Y_1 = M_1 y, \quad Z_1 = P_1 z,$$

wobei M_1 und P_1 die Ausdrücke (11) sind, gebildet für das neue Ellipsoid, d. h. für $\lambda_1^2 = (A_1^2 - \Gamma_1^2)/\Gamma_1^2$ statt für λ^2.

Nach dem MacLaurin'schen Satz hat dann die Kraft, welche das gegebene Ellipsoid auf eine Stelle der Oberfläche des Hülfsellipsoides mit den Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ausübt, die Componenten

15) $$X = \frac{A^2\Gamma}{A_1^2\Gamma_1} M_1\bar{x}, \quad Y = \frac{A^2\Gamma}{A_1^2\Gamma_1} M_1\bar{y}, \quad Z = \frac{A^2\Gamma}{A_1^2\Gamma_1} P_1\bar{z}.$$

und hieraus ergiebt sich gemäß S. 335 das Potential des gegebenen, u. zw. homogen mit den Momenten a', b', c' magnetisirten Ellipsoides zu

16) $$\varphi = \frac{A^2\Gamma}{A_1^2\Gamma_1}(a' M_1\bar{x} + b' M_1\bar{y} + c' P_1\bar{z}),$$

wobei nun A_1, Γ_1, M_1, P_1 sämmtlich Functionen der Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sind.

Ist auch für das Hülfsellipsoid Γ_1 so klein neben A_1, daß Γ_1^2 neben A_1^2 vernachlässigt werden kann, so ist nach (13) $A_1 = A$ zu setzen und $\lambda_1 = A/\Gamma_1$, $\lambda_1/\lambda = \Gamma/\Gamma_1$.

Dann wird auch

17) $$M_1 = N_1 = \frac{\pi}{\lambda_1}\left(\pi - \frac{4}{\lambda_1}\right), \quad P_1 = 4\pi\left(1 - \frac{1}{2\pi\lambda_1}\right),$$

und λ_1 ist geliefert durch die Gleichung des Hülfsellipsoides, die sich jetzt schreiben läßt:

18) $$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2\lambda_1^2 = A^2.$$

Demgemäß nimmt (16) die Gestalt an

19) $$\varphi = \frac{\pi}{\lambda}\left((a'\bar{x} + b'\bar{y})\left(\pi - \frac{4}{\lambda_1}\right) + 4c'\bar{z}\left(\lambda_1 - \frac{1}{2\pi}\right)\right).$$

Wird die Ebene der Leiterellipse vorübergehend zur YZ-Ebene gewählt, so brauchen wir für unsern Zweck allein die X-Componente der von dem magnetisirten Ellipsoid ausgehenden Kraft zu berechnen. Dieselbe folgt allgemein zu

20) $$A' = -\frac{\pi}{\lambda}\left(a'\left(\pi - \frac{4}{\lambda_1}\right) - \frac{4\bar{x}(a'\bar{x} + b'\bar{y})}{\lambda_1^3\bar{z}^2} - \frac{4c'\bar{x}}{\lambda_1\bar{z}}\right),$$

und speciell für die Meridianebene $x = 0$ zu

21) $$A' = -\frac{\pi a'}{\lambda}\left(\pi - \frac{4}{\lambda_1}\right).$$

A' ist hiernach für die Punkte einer zur Meridianellipse confocalen Ellipse constant und ändert sich von einer derartigen Ellipse zur

andern — da ja größere Entfernungen durch die Annahme eines kleinen Werthes Γ_1/A_1 ausgeschlossen sind — nur wenig, nämlich nur wegen des zweiten Gliedes in der Klammer.

Der Werth der bei einer Drehung des magnetisirten Ellipsoides in der Leiterellipse inducirten electromotorischen Kraft ist (da die äußere Feldstärke A_0 sich nicht ändert) proportional mit der zeitlichen Aenderung des Integrales

$$J = \int A' df,$$

dieses genommen über die von der Leiterellipse umschlossene ebene Fläche f. Dabei ist aber auf dem Bereiche von f, das innerhalb des magnetisirten Ellipsoides liegt, für A' derjenige Werth zu setzen, der im Innern eines feinen, das Ellipsoid durchsetzenden Spaltes stattfinden würde, nämlich $A_1' = A' + 4\pi a$. Die Ausführung der einfachen Rechnung liefert bei Vernachlässigung von Eins neben λ^2 den Werth

22) $$J = \pi^2 n \mathsf{A}\Gamma\left(4 - \frac{\pi}{\lambda_1}\right),$$

wobei a' mit n vertauscht ist, um hervorzuheben, daß es sich um das Moment normal zu der Ebene des Leiterkreises handelt.

Dies Resultat zeigt, daß, obwohl das magnetische Feld bei der Drehung des magnetisirten Ellipsoides nicht nur seine Intensität, sondern auch seine Configuration ändert, doch die Beobachtung des inducirten Stromes einen directen Schluß auf das influenzirte Moment n normal zur Ebene des Leiterkreises gestattet.

Bei den Weiß'schen Beobachtungen war jene Ebene bald normal bald parallel zu den Kraftlinien des primären Feldes gestellt; im ersten Fall gab demgemäß die Messung Aufschluß über die Veränderungen des longitudinalen Momentes l, im letzten Falle über die des transversalen Momentes t. Wir wollen die Ausdrücke für diese Größen als Functionen der Orientirung der Kreisscheibe im Magnetfelde nunmehr in den drei von Herrn Weiß beobachteten Fällen berechnen, daß die Kreisscheibe einer Würfelfläche, einer Granatoederfläche oder einer Octaederfläche parallel hergestellt war, indem wir dabei die Scheiben als sehr abgeplattete Rotationsellipsoide betrachten.

4) Für ein Rotationsellipsoid, dessen Axe (Z) in eine Würfelnormale fällt, können unsere Ausgangsformeln (3) unmittelbar angewandt werden. Wir führen sie bis zu den Gliedern dritter Ordnung (d. h. siebenten Grades) fort und schreiben sie unter Benutzung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} K &= k - k_2 H^2 - k_5 H^4 - k_9 H^6, \\ K_1 &= k_1 + k_4 H^2 + k_8 H^4, \\ K_2 &= k_3 + k_7 H^2, \quad K_3 = k_6 \end{aligned} \tag{23}$$

folgendermaßen:

$$\begin{aligned} a &= A(K - K_1 A^2 - K_2 A^4 - K_3 A^6), \\ b &= B(K - K_1 B^2 - K_2 B^4 - K_3 B^6), \\ c &= C(K - K_1 C^2 - K_2 C^4 - K_3 C^6). \end{aligned} \tag{24}$$

Auf dieses System wenden wir das oben auseinandergesetzte Annäherungsverfahren ein Mal an.

Wenn wir dabei, wie schon S. 336 gesagt, von wiederholten Annäherungen absehen, so ist damit implicite vorausgesetzt, daß die Quadrate der Coefficienten erster Ordnung k_1 und k_2 klein neben denen zweiter Ordnung sind, u. s. f. Bei wirklichen Zahlenrechnungen wäre diese Annahme zu prüfen und wäre nöthigenfalls die successive Annäherung an die Stelle der einmaligen zu setzen. Für unsere nächste Aufgabe kann hiervon um so mehr abgesehen werden, als die genaueren Formeln sich nur durch die Bedeutung der Parameter von den hier aufgestellten unterscheiden und ihnen also bei nur qualitativen Ueberlegungen gleichwerthig sind.

Das Resultat der einmaligen Annäherung ist sehr einfach; man erhält die früheren Formeln (24) zurück, nur steht $M_0 A_0$, $M_0 B_0$, $P_0 C_0$ an Stelle von A, B, C, ferner in den ersten beiden Gleichungen $M_0 k_h$, in der letzten $P_0 k_h$ an Stelle von k_h. Wir brauchen indessen dies resultirende allgemeine System nicht aufzuschreiben, da wir dasselbe nur für den Fall einer aequatorial liegenden Feldstärke H_0 von unveränderlicher Größe anwenden werden. Hier, wo $C_0 = 0$ ist, erhalten wir relativ einfach, wenn wir

$$A_0 = H_0 \cos \vartheta, \quad B_0 = H_0 \sin \vartheta \tag{25}$$

setzen, also mit ϑ den Winkel zwischen H_0 und der X-Axe bezeichnen:

$$\begin{aligned} a &= K' \cos \vartheta - K_1' \cos^3 \vartheta - K_2' \cos^5 \vartheta - K_3' \cos^7 \vartheta, \\ b &= K' \sin \vartheta - K_1' \sin^3 \vartheta - K_2' \sin^5 \vartheta - K_3' \sin^7 \vartheta, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei

$$\begin{aligned} K' &= k\, M_0 H_0 - k_2 M_0^4 H_0^3 - k_5 M_0^6 H_0^5 - k_9 M_0^8 H_0^7, \\ K_1' &= k_1 M_0^4 H_0^3 + k_4 M_0^6 H_0^5 + k_8 M_0^8 H_0^7, \\ K_2' &= k_3 M_0^6 H_0^5 + k_7 M_0^8 H_0^7, \qquad K_3' = k_6 M_0^8 H_0^7 \end{aligned} \tag{27}$$

bezeichnet.

Es mag darauf hingewiesen werden, daß bei Fortlassung aller Ergänzungsglieder nur K' von Null verschieden ist, und daß die Einführung je eines höheren Zusatzgliedes stets einem weiteren K'_h einen von Null verschiedenen Werth giebt; bei Beschränkung auf erste Ordnung ist also K' und K'_1 endlich, bei der auf zweite K', K'_1 und K'_2 u. s. f. Daneben ändern die nicht verschwindenden Parameter bei Erweiterung des Ansatzes ihre Werthe.

Für das longitudinale und das transversale Moment

28) $$\begin{aligned} l &= a\cos\vartheta + b\sin\vartheta \\ t &= -a\sin\vartheta + b\cos\vartheta \end{aligned}$$

erhält man hieraus

29) $$\begin{aligned} l &= (K'-K'_1-K'_2-K'_3)+\tfrac{1}{4}\left(2K'_1+3K'_2+4K'_3\left(1-\tfrac{1}{8}\sin 2\vartheta\right)\right)\sin^2 2\vartheta, \\ t &= \tfrac{1}{2}\left(K'_1+K'_2+K'_3\left(1-\tfrac{1}{4}\sin^2 2\vartheta\right)\right)\cos 2\vartheta \sin 2\vartheta. \end{aligned}$$

Es ist von Interesse, zu beachten, wie die Heranziehung höherer Glieder den Verlauf dieser Functionen modificirt. Der alte Ansatz (1) giebt nach dem zu (27) Gesagten l constant, $t = 0$; die Zufügung der Glieder erster Ordnung macht beide um $\frac{1}{2}\pi$ periodisch und zwar l lineär in $\cos 4\vartheta$, t in $\sin 4\vartheta$, so daß der ganze Zug der Curven für l und für t von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ in acht gleiche, abwechselnd nach oben und nach unten liegende Zweige zerfällt; die Amplituden α_l und α_t sind hier einander gleich.

Die Ergänzung durch Glieder zweiter Ordnung ändert die Form der Functionen nicht, macht aber die Amplituden α_l und α_t von einander unabhängig. Die Zufügung der Glieder dritter Ordnung endlich, welche die vollständigen Formeln (29) ergiebt, hebt die Gleichheit der acht Zweige der Curven für l und t auf, rückt z. B. die Stellen größten Falles von l und größter absoluter Werthe von t von den ursprünglichen Abscissen $\vartheta = \frac{1}{4}(2h+1)\pi$ etwas nach den Abscissen $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ hin.

Hiernach läßt ein Blick auf die graphische Darstellung der mit Kreisscheiben parallel zu einer Würfelebene erhaltenen Beobachtungsresultate erkennen, bis zu welchem der hier benutzten Glieder unser allgemeiner Ansatz (3) behufs Erklärung der Thatsachen auszudehnen ist. Die Weiß'schen Messungen am Magnetit von Brozzo geben für l und t Curven, welche durchaus den Habitus der theoretischen besitzen; sie liefern ein Amplitudenverhältniss von ungefähr $\alpha_t = 4\alpha_l$, wodurch mindestens die Glieder zweiter Ordnung (also fünften Grades) erfordert werden; da sie aber außerdem eine Dissymetrie der oben erwähnten Art auf-

weisen, so sind jedenfalls auch die Glieder dritter Ordnung (siebenten Grades) heranzuziehen. Die Nothwendigkeit, so weit zu gehen, erklärt sich vollständig durch die Stärke der Felder, mit denen operirt wurde. In der That zeigen die Beobachtungen, die mit Magnetitstäbchen bei constanter Orientirung, aber wechselnder Feldstärke erhalten sind, daß bei ähnlichen Feldern das Gesetz des erzeugten Momentes von der Proportionalität mit der Feldstärke weit abweicht.

5) Für ein Rotationsellipsoid, dessen Axe (Z) in eine Granatoedernormale fällt, erhalten wir die Magnetisirungsformeln aus dem Ansatz (3) resp. (24), indem wir das Coordinatensystem in Bezug auf die X-Axe um 45^0 drehen. Es resultirt so bei Beschränkung auf die Glieder dritter Ordnung in den Abkürzungen (23):

$$(30)\quad \begin{aligned} a &= A(K-K_1 A^2-K_2 A^4-K_3 A^6),\\ b &= B\big(K-\tfrac{1}{2}K_1(B^2+3C^2)-\tfrac{1}{4}K_2(B^4+10B^2C^2+5C^4)\\ &\qquad -\tfrac{1}{8}K_3(B^6+21B^4C^2+35B^2C^4+7C^6)\big),\\ c &= C\big(K-\tfrac{1}{2}K_1(3B^2+C^2)-\tfrac{1}{4}K_2(5B^4+10B^2C^2+C^4)\\ &\qquad -\tfrac{1}{8}K_3(7B^6+35B^4C^2+21B^2C^4+C^6)\big). \end{aligned}$$

Bei Anwendung des früheren Annäherungsverfahrens und bei Beschränkung auf aequatorial liegende Feldstärken folgt hieraus:

$$31)\quad \begin{aligned} a &= K'\cos\vartheta-K_1'\cos^3\vartheta-K_2'\cos^5\vartheta-K_3'\cos^7\vartheta,\\ b &= K'\sin\vartheta-\tfrac{1}{2}K_1'\sin^3\vartheta-\tfrac{1}{4}K_2'\sin^5\vartheta-\tfrac{1}{8}K_3'\sin^7\vartheta, \end{aligned}$$

wobei die K_h' durch (27) gegeben sind, und ϑ wieder den Winkel zwischen der äußern Feldstärke H_0 und der X-Axe bezeichnet. Für das longitudinale und das transversale Moment erhält man:

$$32)\quad \begin{aligned} l &= (K'-K_1'-K_2'-K_3')\\ &\quad +\big(\tfrac{1}{2}K_1'(1+3\cos^2\vartheta)+\tfrac{3}{4}K_2'(1+\cos^2\vartheta)^2\\ &\qquad +\tfrac{1}{8}K_3'(7+11\cos^2\vartheta+5\cos^4\vartheta+9\cos^6\vartheta)\big)\sin^2\vartheta\\ t &= \tfrac{1}{4}\big(K_1'+\tfrac{1}{2}K_2'(1+\cos^2\vartheta)\\ &\quad +\tfrac{1}{4}K_3'(1-\cos^2\vartheta+4\cos^4\vartheta)\big)\sin 2\vartheta\,(3\cos^2\vartheta-1). \end{aligned}$$

In Bezug auf diese complicirten Formeln gilt nahe dasselbe, was zu (29) gesagt ist. Ohne den Verlauf wesentlich zu ändern, modificiren die Glieder zweiter und dritter Ordnung doch bedeutungsvoll das durch die ersten beiden (in K' und K_1' multiplicirten) Glieder ausgedrückte Gesetz. t verschwindet unter allen Umständen in der Richtung der Würfelnormale ($\vartheta = 0$ oder π), der Grana-

toedernormale ($\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$) und der Octaedernormale ($\cos\vartheta = \pm 1/\sqrt{3}$), und besitzt seinem absoluten Werthe nach ein kleines Maximum in der Nähe der Granatoeder-, ein größeres in der Nähe der Würfelnormale; aber die Lage seiner Maxima und Minima und ihre relative Größe ändert sich bei Hinzunahme höherer Glieder. Auch hier zeigt eine Construction des Verlaufes der bei den Gliedern dritter Ordnung abgebrochenen Formeln durch die Vergleichung mit den von Herrn Weiß nach seinen Beobachtungen hergestellten neben einer weitgehenden Aehnlichkeit der beiden Curven durch kleine charakteristische Differenzen doch ohne alle Rechnung die Nothwendigkeit der Heranziehung der höheren Glieder.

6) Für ein Rotationsellipsoid, dessen Axe (Z) in eine Octaedernormale fällt, erhalten wir die Magnetisirungsformeln aus dem System (30) durch Drehung des Coordinatensystemes in Bezug auf die Y-Axe um den Winkel $\chi = 35^0\ 16'$ ($\sin^2\chi = \frac{1}{3}$) in negativem Sinne. Es bleibt dabei also die Y-Axe in der Richtung einer Granatoedernormale liegen. Die resultirenden Formeln sind sehr complicirt; wir beschränken uns daher hier von allem Anfang auf den Fall, daß die innere Feldstärke in der Aequatorialebene liegt, setzen also $C = 0$. Dann resultirt nach ziemlich umständlichen Reductionen:

$$\begin{aligned} a &= (KH - \tfrac{1}{2}K_1H^3)\cos\vartheta - \tfrac{1}{36}K_2H^5(10\cos\vartheta + \cos 5\vartheta) \\ &\quad - \tfrac{1}{216}K_3H^7[(35 + 2\cos 6\vartheta)\cos\vartheta + 6\cos 5\vartheta], \\ b &= (KH - \tfrac{1}{2}K_1H^3)\sin\vartheta - \tfrac{1}{36}K_2H^5(10\sin\vartheta - \sin 5\vartheta) \\ &\quad - \tfrac{1}{216}K_3H^7[(35 + 2\cos 6\vartheta)\sin\vartheta - 6\sin 5\vartheta], \\ c &= -(K_1H^3 + \tfrac{5}{6}K_2H^5 + \tfrac{7}{12}K_3H^7)\frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3\vartheta). \end{aligned} \tag{33}$$

Führt man wie oben durch das Annäherungsverfahren die äußere Feldstärke H_0 ein, so resultirt in den früheren Abkürzungen:

$$\begin{aligned} a &= (K' - \tfrac{1}{2}K_1')\cos\vartheta - \tfrac{1}{36}K_2'(10\cos\vartheta + \cos 5\vartheta) \\ &\quad - \tfrac{1}{216}K_3'[(35 + 2\cos 6\vartheta)\cos\vartheta + 6\cos 5\vartheta], \\ b &= (K' - \tfrac{1}{2}K_1')\sin\vartheta - \tfrac{1}{36}K_2'(10\sin\vartheta - \sin 5\vartheta) \\ &\quad - \tfrac{1}{216}K_3'[(35 + 2\cos 6\vartheta)\sin\vartheta - 6\sin 5\vartheta], \\ c &= -\frac{P_0}{M_0}(K_1' + \tfrac{5}{6}K_2' + \tfrac{7}{12}K_3')\frac{1}{3\sqrt{2}}\cos 3\vartheta. \end{aligned} \tag{34}$$

Abweichend von den beiden oben behandelten Fällen verschwindet hier die Componente c nach der Axe Z des Rotations-

ellipsoides **nicht**, selbst dann nicht, wenn man sich auf die Zusatzglieder erster Ordnung beschränkt; sie hat einen mit ϑ periodischen Werth von der Periode $2\pi/3$, wie dies dem Umstand entspricht, daß jetzt die Z-Axe eine dreizählige Symmetrieaxe der Substanz ist. Das Gesetz dieser Componente ändert sich bei Heranziehung der Glieder höherer Ordnung nur allein bezüglich der Bedeutung des constanten Factors.

Handelt es sich um ein stark abgeplattetes Rotationsellipsoid, so ist nach S. 337 c wegen des Factors P_0/M_0 sehr klein neben a und b. Bei den Weiß'schen Beobachtungen ist sein Werth überhaupt nicht bestimmt.

Die Werthe des longitudinalen und des transversalen Momentes folgen aus (34) relativ einfach zu

$$35)\quad \begin{aligned} l &= (K' - \tfrac{1}{2}K_1') - \tfrac{1}{36}K_2'(10 + \cos 6\vartheta) - \tfrac{1}{216}K_3'(35 + 8\cos 6\vartheta), \\ t &= \tfrac{1}{36}(K_2' + K_3')\sin 6\vartheta. \end{aligned}$$

Auch hier zeigt sich gegenüber den früheren Werthen (29) und (32) ein bedeutungsvoller Unterschied. Während bei jenen die Veränderlichkeit von l mit der Richtung und ein Werth von t bereits bei den Gliedern erster Ordnung einsetzte, beginnt hier beides erst mit den Gliedern zweiter Ordnung, die obenein in den Formeln mit sehr kleinen Zahlenfactoren behaftet sind. Man wird daraus schließen dürfen, daß hier beide Effecte erheblich unbedeutender sind, als in den früheren Fällen. In der That haben die Messungen, die Herr Weiß an Kreisscheiben, parallel zu einer Octaederfläche geschnitten, angestellt hat, deutliche Resultate nach beiden Richtungen nicht geliefert. Die kleinen Wirkungen sind offenbar durch secundäre Einflüsse, Inhomogenitäten und Sprünge des Materiales, Unregelmäßigkeiten der geometrischen Form der Präparate, verdeckt worden. —

Die vorstehenden Entwickelungen lassen es wünschenswerth erscheinen, daß bei weiteren Beobachtungen Sorge getragen wird, die Verhältnisse nach Möglichkeit zu vereinfachen. Die im Allgemeinen höchst complicirten Formeln reduciren sich erheblich, wenn die Feldstärken klein genug gewählt werden, um mit den Zusatzgliedern erster Ordnung oder dritten Grades auszukommen. Bei der großen Genauigkeit der von Herrn Weiß benutzten Beobachtungsmethode scheint das sehr wohl möglich. In diesem Falle hängt der ganze Vorgang bei einem unveränderlichen Feld ausgesetzten Kreisscheiben von nur zwei Parametern ab.

Göttingen, October 1900.

Ueber raumgleiche Polyeder.

Von

M. Dehn in Karlsruhe.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 27. October 1900.

Raumgleich wollen wir, wie üblich, zwei inhaltsgleiche Polyeder, Π_1 und Π_2 dann nennen, wenn sie in respective congruente Polyeder zerlegt werden können. Dabei ist die Inhaltsgleichheit in bekannter Weise mittels eines Grenzprozesses definirt zu denken. Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, eine allgemeine Bedingung für die Raumgleichheit zweier Polyeder aufzustellen. Um zu zeigen, daß diese Bedingung nicht stets bei inhaltsgleichen Polyedern erfüllt, also trivial ist, sollen einige specielle Fälle untersucht werden, von denen der eine die Verwandlung eines regulären Tetraeders in ein Prisma behandelt. Es wird sich das, wegen der analogen Verhältnisse in der Ebene auf den ersten Blick vielleicht überraschende, Resultat ergeben, daß *ein reguläres Tetraeder keinem Prisma raumgleich sein kann, daß also Tetraeder und Prisma auf keine Weise in respective congruente Teile zerlegt werden können.*

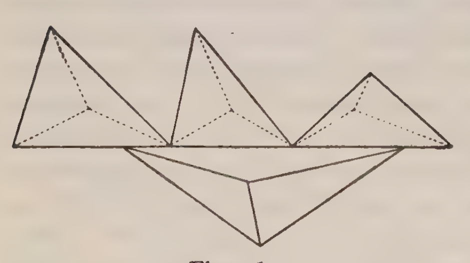
Als *Teilung* zweier inhaltsgleicher Polyeder Π_1, Π_2 wollen wir kurz eine solche Zerlegung von Π_1 und Π_2 bezeichnen, bei der diese in beziehungsweise congruente Teilpolyeder zerfallen. Aus einer Teilung von Π_1 und Π_2 können wir leicht beliebig viele andere Teilungen gewinnen. Wir brauchen nur irgend welche Teilpolyeder von Π_1 wieder zu zerlegen und genau dieselbe Zerlegung an den entsprechenden, congruenten Teilpolyedern von Π_2 anzubringen. Eine besonders einfache derartige Abänderung ist die, daß man Kanten von Teilpolyedern in eine Anzahl von Teilen zerlegt. Wir werden dies Verfahren im Folgenden häufig anwenden.

Unsere Hauptaufgabe besteht nun darin, nachzuweisen, daß aus einer beliebigen Teilung stets eine *Normalteilung* hervorgeht, die wegen ihrer besonderen, leicht zu übersehenden Eigenschaften, es uns ermöglicht, die gewünschte Bedingung für die Raumgleichheit von Π_1 und Π_2, beinahe mühelos, abzuleiten.

Wir definieren:

Normalteilung von Π_1 und Π_2 ist eine solche Teilung, bei der sich die Kanten der Teilpolyeder sowohl in Π_1 wie in Π_2 so in einzelne Gruppen ordnen lassen, daß die Summe der Flächenwinkel an den Kanten einer Gruppe gleich $2R$ oder $4R$ oder gleich einem Flächenwinkel des betreffenden Polyeders, Π_1 resp. Π_2 ist.

Die vorgelegte beliebige Teilung von Π_1 und Π_2 vereinfachen wir zunächst in folgender Weise: Auf einer Kante eines Teilpolyeders von Π_2 werden im Allgemeinen Endpunkte anderer „Teilkanten" liegen, die zum Teil mit der ersten Kante zusammenfallen — s. Fig. 1. In jedem solchen Punkte teilen wir die betreffende Kante und machen dieselbe Operation bei allen Kanten der Teil-Polyeder von Π_2. Zerlegen wir die Teilpolyeder von Π_1 genau so, wie die entsprechenden congruenten Teilpolyedern von Π_2, so haben wir eine neue Teilung von Π_1 und Π_2 gewonnen, die in Bezug auf Π_2 eine Normalteilung ist: die gesamten Teilkanten von Π_2 ordnen sich in einzelne Gruppen von lauter gleichen und zusammenfallenden Kanten ein und die Summe der Flächenwinkel in jeder Gruppe ist wie erforderlich gleich $4R$, $2R$ oder gleich einem Flächenwinkel von Π_2.



Figur 1.

Wir wollen nun versuchen, solche Aenderungen an der Π_1-Teilung anzubringen, die einerseits durch die dadurch nötig gewordenen, entsprechenden Veränderungen der Π_2-Teilung dieser nicht den Charakter der Normalteilung nehmen, anderseits aber die Π_1-Teilung in eine Normalteilung umwandeln.

Wir betrachten eine beliebige Kante eines Teilpolyeders von Π_1 — eine Teilkante, wie wir kurz sagen wollen. Ihre beiden Endpunkte seien P_n und P_{n+1}. Im Allgemeinen wird es eine Teilkante geben, welche, mit $P_n P_{n+1}$ teilweise zusammenfallend, zum

Teil über P_{n+1} hinausragt. In diesem Falle giebt es stets[1]) eine Kante $P_{n+1}P_{n+2}$, wo P_{n+2} mit P_{n+1} und P_n in gerader Linie liegt. Ebenso finden wir weiter eine Kante $P_{n+2}P_{n+3}$(P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3} auf einer Geraden), sofern nicht alle Kanten, welche mit dem Ende von $P_{n+1}P_{n+2}$ zusammenfallen, in P_{n+2} endigen. So fortfahrend gelangen wir endlich zu einer Teilkante $P_{n+m}Q$($P_n P_{n+1} \ldots P_{n+m} Q$ in gerader Linie), wo alle Teilkanten, welche mit dem Ende von $P_{n+m}Q$ zusammenfallen, in Q endigen. In derselben setzen wir $P_n P_{n+1}$ über P_n hinaus fort bis P. Aus dem Verfahren geht hervor, daß eine Teilkante mit PQ nicht teilweise sondern nur ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen kann. Die Gesamtheit aller mit PQ zusammenfallenden Teilkanten wollen wir kurz als den *Kantenzug* PQ bezeichnen. Greifen wir nun eine beliebige nicht zu diesem zugehörige Kante $P'_n P'_{n+1}$ heraus und wenden auf diese denselben „Verlängerungsproceß" an, so gelangen wir zu einem neuen Zuge $P'Q'$ u. s. w. Das Resultat ist: *Die Gesamtheit aller Kanten ordnet sich in einzelne Kantenzüge ein.*

Betrachten wir wieder einen einzelnen Kantenzug PQ. Es ist möglich, daß ein Teil von PQ in die Seitenfläche eines Teilpolyeders von Π_1 fällt (s. Fig. 2). In diesem Falle fügen wir dem betreffenden Polyeder das mit einer seiner Begrenzungsflächen zusammenfallende Stück von PQ als neue Kante hinzu. Dieselbe Operation haben wir nun an dem entsprechenden congruenten Teilpolyeder von Π_2 zu machen. Es ist klar, daß hierdurch die Teilung von Π_2 eine Normalteilung bleibt, da ja nur eine Kante mit einem Flächenwinkel $= 2R$ hinzukommt. Wenden wir dieses Verfahren in allen analogen Fällen bei PQ und den anderen Kantenzügen an, so kommen wir zu dem Resultat: Die Summe der Flächenwinkel an jeder Stelle eines Zuges ist gleich einem Flächenwinkel π_i^1 von Π_1, wenn die Zugkante mit einer Kante p_i^1 von Π_1 zusammenfällt, $= 2R$, wenn die Zugkante mit einer Seitenfläche von

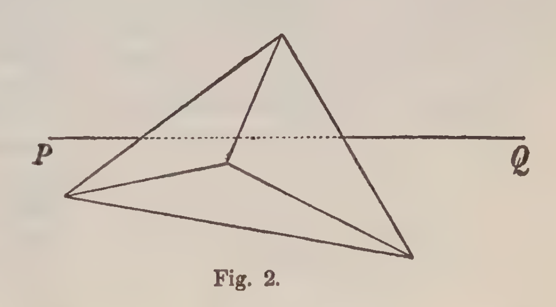


Fig. 2.

1) Es kann (bei nicht überall convexen Polyedern) vorkommen, daß $P_{n+1}P_{n+2}$ eine Polygonkante und keine Teilkante ist. Um dies zu vermeiden, wollen wir bei der vorgelegten Teilung von Π_1 und Π_2 zunächst die Teilkanten in den Eckpunkten von Π_1 resp. Π_2 teilen.

Π_1 zusammenfällt, $= 4R$ in allen übrigen Fällen. Wir sagen kurz: ein Kantenzug mit der Winkelsumme $4R$, $2R$ oder π_i^1.

Jetzt wollen wir ganz von dem Zusammenhang der Teilkanten durch die Teilpolyeder absehen und uns nur jede Kante mit dem zu ihr gehörigen Flächenwinkel verknüpft denken. Wir vereinigen alle Kantenzüge mit den daran hängenden Flächenwinkeln zu *einem* in gerader Linie verlaufenden *Gesamt-Kantenzug AO*. Diese Vereinigung soll nun so geschehen, daß je eine der beiden Begrenzungsflächen mit der Winkelsumme π_i^1 und die Begrenzungsflächen der Züge mit der Winkelsumme $2R$ in eine Ebene **E** fallen, so zwar, daß die an jene Begrenzungsfläche sich anschließenden Flächenwinkel alle auf ein und derselben Seite der Ebene **E** liegen.

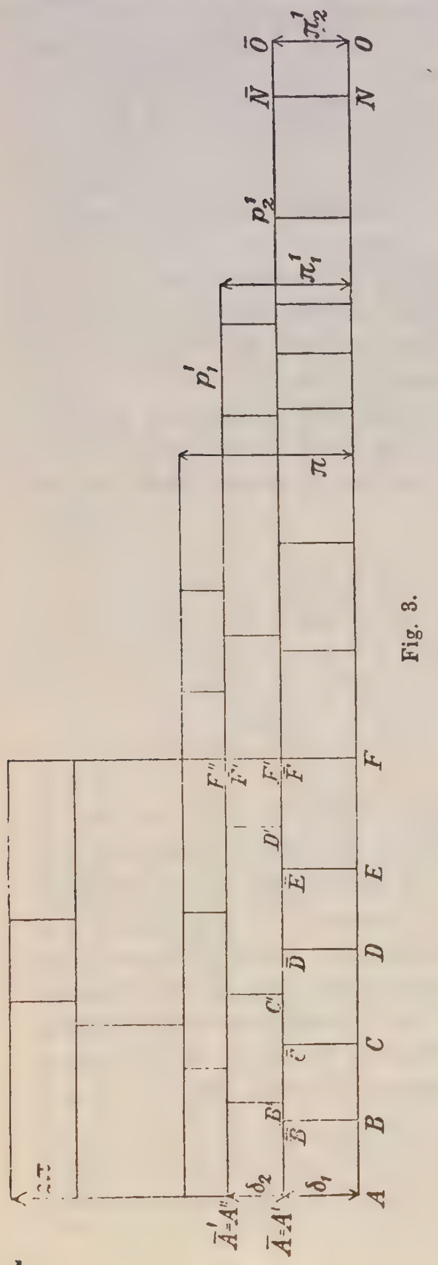


Fig. 3.

Durch AO und sämtliche die Flächenwinkel bildenden Flächen legen wir Halbebenen. Wird ein Flächenwinkel durch diese Halbebenen in n Teile geteilt, so denken wir uns die dazugehörige Kante n-fach vorhanden und ordnen den n Kanten die n Teile des Winkels eindeutig zu. Dieselbe Operation vollführen wir auch in Π_2, das ersichtlich auch nach dieser Aenderung noch eine Normalteilung besitzt. Betrachten wir nun von jenen Halbebenen die Halbebene h_1, die in die Ebene **E** fällt,

und die darauffolgende, h_2, welche mit allen Zügen Flächen gemeinsam hat. Diese beiden Halbebenen mögen den Winkel δ_1 bilden. Seien nun AB, BC, CD ..... NO die Kanten, deren Flächenwinkel mit δ_1 zusammenfallen, dann tragen wir AB, BC .... NO auf einer geraden Linie von A bis O ab und errichten über jeder Strecke ein Rechteck mit der Höhe $= \delta_1$ (s. Fig. 3). Die Halbebene h_1 und die darauffolgende h_2 mögen den Winkel δ_2 bilden und A_1B_1, B_1C_1, ... N_1O_1 die Kanten sein, deren Flächenwinkel mit δ_2 zusammenfallen. Wir errichten über den vorher construirten Rechtecken $AB\bar{B}\bar{A}$ ..... $NO\bar{O}\bar{N}$ neue Rechtecke $A_1(\bar{A})B\,\bar{B}\,\bar{A}_1$, ... $N_1O_1(\bar{O})\bar{O}_1\bar{N}_1$ mit den respectiven Grundlinien A_1B_1, B_1C_1 .... N_1O_1 und den Höhen $= \delta_2$. Wir fahren so fort und erhalten das in Figur 3 schematisch dargestellte Bild des Gesamt-Kantenzuges.

Seien unsere Teilkanten respective gleich a_1, a_2 .... a_n. Dann möge

$$\mathsf{A}\begin{cases} l_1(a_1 \ldots\ldots a_n) = 0 \\ l_2(a_1 \ldots\ldots a_n) = 0 \\ \vdots \\ l_m(a_1 \ldots\ldots a_n) = 0 \end{cases}$$

das System der von einander unabhängigen in a_1 .... a_n linearen und homogenen Gleichungen mit rationalen Coefficienten sein. Wir können durch $m-n$ dieser Größen, etwa a_{i_1} ...... $a_{i_{n-m}}$ die übrigen m Größen a_{d_1} ...... a_{d_m} linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken.

Sei:

$$\mathsf{B}\begin{cases} a_{d_1} = L_1(a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_{n-m}}) \\ a_{d_2} = L_2(a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_{n-m}}) \\ \vdots \\ a_{d_m} = L_m(a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_{n-m}}) \end{cases}$$

Wir setzen:

$$a_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1, \quad a_2 = \alpha_2 + \varepsilon_2 \ldots\ldots a_n = \alpha_n + \varepsilon_n$$

und:

$$\mathsf{C}\begin{cases} \alpha_{d_1} = L_1(\alpha_{i_1} \ldots\ldots \alpha_{i_{n-m}}) \\ \alpha_{d_1} = L_2(\alpha_{i_1} \ldots\ldots \alpha_{i_{n-m}}) \\ \vdots \\ \alpha_{d_m} = L_m(\alpha_{i_1} \ldots\ldots \alpha_{i_{n-m}}) \end{cases}$$

Da nun $L_1, L_2 \ldots\ldots L_m$ stetige Funktionen der a_{i_k} sind, so kann stets eine Größe ε so finden, daß, wenn

$$|\varepsilon_{i_1}| \ldots\ldots |\varepsilon_{i_{n-m}}| < |\varepsilon|$$

sind,

$$|\varepsilon_{d_1}| < a_{d_1}, \qquad |\varepsilon_{d_2}| < \alpha_{d_2} \ldots\ldots |\varepsilon_{d_m}| < a_{d_m}$$

ist, daß folglich, da $a_{d_1} \ldots\ldots a_{d_m}$ sämtlich positive Größen sind, auch $\alpha_{\alpha_1} \ldots\ldots \alpha_{\alpha_m}$ sämtlich positiv sind. Dann ergiebt sich leicht, daß wir die Größen $a_1 \ldots\ldots a_n$ durch positive rationale Größen $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ ersetzen können, die das Gleichungssystem **C** und deshalb auch, an die Stelle von $a_1 \ldots\ldots a_n$ gesetzt, *das Gleichungssystem* **A** *befriedigen.*

Wir bringen $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ auf denselben Nenner, und es sei

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{q}, \qquad \alpha_2 = \frac{r_2}{q}, \ \ldots\ldots \ \alpha_n = \frac{r_n}{q} \ldots\ldots \mathbf{D}.$$

Und nun wollen wir wieder eine Aenderung in der Π_1-Teilung ausführen, welche der Π_2-Teilung den Charakter der Normalteilung nicht nehmen kann. Wir teilen nämlich die Kante a_1 in r_1, die Kante a_2 in $r_2 \ldots\ldots$, die Kante a_n in r_n Teile. Da, wenn $a_k = a_l$ wegen **A** und **C** auch $\alpha_k = \alpha_l$ und also $r_k = r_l$ ist, so werden alle gleichen Kanten in eine gleiche Anzahl von gleichen Teilen geteilt. Führen wir die entsprechende Teilung in Π_2 aus, so kann dadurch die Normalteilung von Π_2 nicht zerstört werden. Wir behaupten aber, daß durch diese Teilung auch die Π_1-Teilung in eine Normalteilung übergeführt ist.

In der That, jedes der den Kantenzug mit der Winkelsumme $4R$ bildenden Rechtecke (s. Fig. 3) $AB \ldots\ldots FF(F'') \ldots\ldots \overline{B}\overline{A}$, $A'(\overline{A})B' \ldots\ldots F'(\overline{F})\overline{F}' \ldots\ldots \overline{B}'\overline{A}'$ u. s. w. wird durch den obigen Proceß in eine gleiche Anzahl von Teilen zerlegt. Denn wenn

$$AB = a_{k_1}, BC = a_{k_2} \ldots\ldots EF = a_{k_f}$$
$$A'B' = a_{k'_1} B'C' = a_{k'_2} \ldots\ldots E'F' = a_{k'_{f'}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, so ist, wie aus der Figur ersichtlich:

$$a_{k_1} + a_{k'_2} \ldots\ldots a_{k_f} = a_{k'_1} + a_{k'_2} + \cdots\cdots a_{k'_f} = \cdots\cdots$$

Folglich nach **A** und **C** auch:

$$\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \cdots\cdots \alpha_{k_f} = \alpha_{k'_1} + \alpha_{k'_2} + \cdots\cdots \alpha'_{k'_f} = \cdots\cdots$$

und nach **D**:

$$r_{k_1} + r_{k_2} + \cdots\cdots r_{k_f} = r_{k'_1} + r_{k'_2} + \cdots\cdots r_{k'_f} = \cdots\cdots$$

Ordnen wir also den ersten Abschnitt von AB, den ersten Abschnitt von $A'B'$, den ersten Abschnitt von $A''B''$ etc. einander zu, ebenso die zweiten Abschnitte, und fahren so fort, so gelangen wir zu einer Ordnung sämtlicher den Kantenzug mit der Winkelsumme $4R$ bildenden Kanten in Gruppen von Kanten. Daß die Summe der Flächenwinkel der Kanten einer Gruppe jedesmal gleich $4R$ ist, ergiebt sich unmittelbar aus der Figur. Behandeln wir in derselben Weise die übrigen Kantenzüge mit der Winkelsumme gleich $2R$ oder gleich π_i^1, so sehen wir, daß sämtliche Kanten von Π_1 in einzelne Gruppen mit der Winkelsumme gleich $4R$, gleich $2R$ oder gleich Π_i^1 zerfallen, womit bewiesen ist, daß auch die Teilung von Π_1 eine Normalteilung ist. Wir haben also den

Satz: Aus jeder Teilung zweier raumgleicher Polyeder geht eine Normalteilung (in Bezug auf *beide* Polyeder) *hervor.*

Ist eine Teilung eines Polyeders Π eine Normalteilung, so ist die Summe sämtlicher Flächenwinkel der Teilpolyeder, wie sich unmittelbar aus der Definition der Normalteilung oder auch aus Fig. 3 ergiebt, in der Form enthalten (π_i = Flächenwinkel von Π):

$$n_1\pi_1 + n_2\pi_2 + \cdots\cdots 2mR.$$

Giebt es also eine Teilung von Π_1 und Π_2 und deshalb, wie eben bewiesen, auch eine Normalteilung derselben, so muß

$$n_1^1\pi_1^1 + n_2^1\pi_2^1 + \cdots\cdots 2m^1 R = n_1^2\pi_1^2 + n_2^2\pi_2^2 + \cdots\cdots 2m^2 R$$

sein. (π_i^1 sind Flächenwinkel von Π_1, π_i^2 Flächenwinkel von Π_2). Wir haben also den

Satz: Sind Π_1 und Π_2 raumgleich, so muß

$$n_1^1\pi_1^1 + n_2^1\pi_2^1 + \cdots\cdots \equiv n_1^2\pi_1^2 + n_2^2\pi_2^2 + \cdots\cdots \pmod{2R}$$

sein, wo die Größen n_i^1 und n_i^2 ganze positive Zahlen sind.

Beispiele.

1) *Reguläres Tetraeder.*

Ist das reguläre Tetraeder einem rechtwinkligen Parallepipede raumgleich, so muß, wenn der Winkel des Tetraeder mit τ bezeichnet wird, nach dem Vorhergehenden entweder

$$\sin n\tau = 0$$

sein oder

$$\cos n\tau = 0$$

sein.

Erster Fall: n gerade. Wir entwickeln $\sin(n\tau)$ und $\cos(n\tau)$ nach den bekannten Formeln:

$$\sin n\tau = \cos\tau\left[n\sin\tau - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3\tau + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin\tau - \cdots\cdots\right]$$

$$\cos n\tau = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2\tau + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4\tau - \cdots\cdots$$

Setzen wir hierin für $\sin\tau$ und $\cos\tau$ ihre Werte $\sqrt{\frac{8}{9}}$ und $\frac{1}{3}$, für $\sin(n\tau)$ und $\cos(n\tau)$ 0 ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(n-1)!\,9^{n-2} =$$
$$\frac{(n+2)(n-2)(n-1)!\,8.\,9^{n-3}}{3!} - \frac{(n+4)(n+2)(n-2)(n-4)(n-1)!\,8^2 9^{n-4}}{5!} + \cdots\cdots$$

$$n!\,9^{n-2} = \frac{n\cdot n\cdot n!\,8\cdot 9^{n-3}}{2!} - \frac{n\cdot n(n+2)(n-2)\cdot 8^2\cdot 9^{n-4}}{4!} + \cdots\cdots$$

Eine von diesen beiden Gleichungen müßte nun eine Lösung haben, wenn unsere Annahme richtig wäre. Aber keine ganze Zahl n kann eine von diesen Gleichungen befriedigen. Ist nämlich der Ausdruck auf der rechten Seite durch 2^p aber nicht durch 2^{p+1} teilbar, so ist der Ausdruck auf der linken Seite nicht durch 2^{p-1} teilbar.

Zweiter Fall: n ungerade. Die analogen Formeln lauten:

$$\sin n\tau = n\sin\tau - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\tau + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\tau - \cdots\cdots$$

$$\cos n\tau = \cos\tau\left[1 - \frac{n^2-1}{2!}\sin^2\tau + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\tau - \cdots\cdots\right]$$

Sezten wir die speciellen Werte ein, so erhalten wir:

$$n!\,9^{n-1} =$$

$$\frac{(n+1)(n-1)n!\,8\cdot 9^{n-2}}{3!} - \frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)n!\,8^2 9^{n-3}}{5!} + \cdots$$

$$(n-1)!\,9^{n-1} =$$

$$\frac{(n+1)(n-1)(n-1)!\,8\cdot 9^{n-2}}{2!} - \frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-1)!\,8^2 9^{n-3}}{4!} + \cdots$$

Aus demselben Grunde wie im ersten Falle sind auch diese beiden Gleichungen nicht durch eine ganze Zahl n erfüllbar. Wir haben deshalb das Resultat gewonnen.

Ein reguläres Tetraeder kann keinem rechtwinkligem Parallepipede raumgleich sein.

Es läßt sich leicht zeigen, daß jedes Prisma einer Anzahl rechtwinkliger Parallepipede raumgleich ist. Andererseits geht aus dem Vorhergehenden hervor, daß ein reguläres Tetraeder und eine Gesamtheit von rechtwinkligen Parallepipeden nicht raumgleich sein kann. Endlich besteht der Satz: Sind zwei Polyeder einem dritten raumgleich, so sind sie selbst raumgleich. Wir haben deshalb einen Satz gewonnen, dem wir gleich die folgende allgemeinste Form geben:

Eine Gesamtheit von regulären Tetraedern und eine Gesamtheit von Prismen sind niemals raumgleich.

2) *Tetraeder mit drei auf einander rechtwinklig stehenden Kanten (gleichschenklig-rechtwinkliges Tetraeder).*

Genau so wie beim ersten Beispiel ergiebt sich der Satz:

Eine Gesamtheit von gleichschenklig-rechtwinkligen Tetraedern und eine Gesamtheit von Prismen sind niemals raumgleich.

3) *Reguläres und gleichschenklig-rechtwinkliges Tetraeder.*

Die nicht rechten Winkel des letzteren seien gleich ϱ. Dann ist

$$2\varrho = 2R - \tau.$$

Denn es ist

$$\cos\varrho = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

und deshalb:

$$\cos 2\varrho = -\tfrac{1}{3} = -\cos\tau = \cos(2R-\tau).$$

Wenn nun die beiden Tetraeder einander raumgleich wären, so müßte

$$n\tau \equiv n'\varrho \qquad (\text{mod } R)\,(n \text{ und } n' > 0)$$

sein; nun ist aber gleichzeitig nach dem Vorhergehenden

$$\tau \equiv -2\varrho \pmod{R}$$

Folglich:

$$(2n+n')\tau \equiv 0 \pmod{R},$$

eine Gleichung, die nach dem im Beispiel 1 Bewiesenen unmöglich ist. Folglich haben wir den Satz:

Eine Gesamtheit von regulären und eine Gesamtheit von gleichschenklig rechtwinkligen Tetraedern sind niemals raumgleich [1]).

---

1) Das im Vorstehenden behandelte Problem ist schon von Gauß angeregt worden und gehört zu den 23 Problemen, die von D. Hilbert in seinem Pariser Vortrag (Gött. Nachr. 1900 Heft 31) aufgestellt sind. Der Beweis, daß im Allgemeinen auch die „égalité par soustraction" unmöglich ist, wird in einem Artikel in den Math. Annalen behandelt werden.

Ueber die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Dezember 1900.

In einer unlängst an dieser Stelle veröffentlichten Abhandlung[1]) habe ich mich mit der Ableitung der allgemeinen Eigenschaften derjenigen zweiseitigen gerichteten Größen beschäftigt, die, zu je drei coexistirend, in der Theorie der Elasticität die hauptsächlichen Variabeln darstellen, und die ich als Tensoren bezeichnet habe. Dabei habe ich darauf hingewiesen, daß dergleichen Tensortripel auch in gewissen Parametergattungen der theoretischen Physik enthalten sind. So stellen die Trägheits- und Deviationsmomente eines Körpers um einen Punkt, genommen nach drei zu einander normalen Axen, die sechs Componenten eines Tensortripels dar, das hier aus den drei Hauptträgheitsmomenten des Körpers um eben jenen Punkt zusammengesetzt ist.

Einen besonderen Vortheil bietet nun speciell die Zurückführung der Parameter der Krystallphysik auf gerichtete Größen verschiedener Art, und man kann hierin erheblich weiter gehen, als a. a. O. durch ein Beispiel gezeigt ist. Man gewinnt so eine anschauliche Darstellung der einzelnen physikalischen Eigenschaften eines Krystalles, die bei der Complicirtheit der hier unter Umständen vorliegenden Verhältnisse willkommen sein dürfte.

Das gewünschte Ziel läßt sich leicht erreichen mit Hülfe des folgenden einfachen Satzes:

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1900, Nr. 2, p. 117.

Ist ein Scalar S eine beliebige Function eines Systemes orthogonaler Variabeln, so ist jeder erste Differentialquotient nach einer dieser Variabeln bezüglich der Transformationseigenschaften dieser selbst gleichartig.

In der That, sind $X_1, X_2 \ldots X_n$ die Variabeln, die sich nach dem Schema

$$X_h = \sum_i \alpha_{hi} Y_i, \quad Y_k = \sum_j \alpha_{jk} X_j$$

in die $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ transformiren, so ist auch

$$\frac{\partial S}{\partial X_h} = \sum_i \alpha_{hi} \frac{\partial S}{\partial Y_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial Y_k} = \sum_j \alpha_{jk} \frac{\partial S}{\partial X_j}.$$

Hieraus folgt noch specieller:

Ist ein Scalar S eine homogene lineäre Function eines Systemes orthogonaler Variabeln, so ist jeder ihrer Parameter der in ihn multiplicirten Variabeln bezüglich der Transformationseigenschaften gleichartig.

In der That, ist S in der Form $S = \sum_h a_h X_h$ gegeben, so gilt auch $a_h = \partial S / \partial X_h$.

Aus Letzterem ergiebt sich nun die folgende Regel: Läßt sich eine beliebige scalare Function auf die Gestalt eines oder mehrerer in orthogonalen Variabeln lineären Ausdrücke bringen, so haben deren Parameter leicht erkennbare Transformationseigenschaften; da aber die Transformationseigenschaften die gerichteten Größen verschiedener Ordnung characterisiren, so ist mit Feststellung der ersteren auch der geometrische Character der betreffenden Parameter erwiesen. Bei der Anwendung dieser Regel wollen wir uns auf die wichtigste Art von Scalaren beschränken, die bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Vorzeichen nicht wechseln, also Functionen entgegengesetzten Verhaltens (Pseudoscalare) wie z. B. die magnetische Dichte, ausschließen.

Für das Weitere ist es nützlich, ein System von Ausdrücken wachsenden Grades in den Coordinaten aufzustellen, die sich orthogonal transformiren; eine einfache Rechnung führt zu folgendem Schema:

1) x, y, z;

2) $x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}\, yz, \sqrt{2}\, zx, \sqrt{2}\, xy$;

3) $x^3, y^3, z^3, \sqrt{3}\, x^2y, \sqrt{3}\, x^2z, \sqrt{3}\, y^2z, \sqrt{3}\, y^2x, \sqrt{3}\, z^2x, \sqrt{3}\, z^2y, \sqrt{6}\, xyz$;

4) $x^4, y^4, z^4, 2x^3y, 2x^3z, 2y^3z, 2y^3x, 2z^3x, 2z^3y,$

$\sqrt{6}\, y^2z^2, \sqrt{6}\, z^2x^2, \sqrt{6}\, x^2y^2, 2\sqrt{3}\, x^2yz, 2\sqrt{3}\, y^2zx, 2\sqrt{3}\, z^2xy.$

Man kann nun als gerichtete Größen erster, zweiter, dritter ... $n$ter Ordnung Functionen bezeichnen, deren 3, 6, 10, ... $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Bestimmungsstücke sich wie die Ausdrücke unter 1), 2), 3) ... in obigem Schema transformiren. Es erscheinen dann die Vectoren als gerichtete Größen erster, die Tensoren, oder genauer die Tensortripel, als solche zweiter Ordnung. Und zwar werden von letzteren dabei diejenigen Componenten vorausgesetzt, die ich s. Z. als orthogonale Tensorcomponenten bezeichnet habe[1]). Dabei mag daran erinnert werden, daß diese Componenten nicht direct physikalische Bedeutung haben und daher bei speciellen Untersuchungen sich zur Benutzung weniger empfehlen, als jene Ausdrücke, die sich wie $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ selbst transformiren, und die ich gewöhnliche Tensorcomponenten nennen möchte. Bei den folgenden allgemeinen Entwickelungen werden stets die orthogonalen Tensorcomponenten vorausgesetzt. Die hierdurch überaus häufig in die Formeln eingehenden Wurzelgrößen sollen dabei immer abgekürzt, u. zw. soll

2) $$\sqrt{2} = r, \quad \sqrt{3} = s$$

gesetzt werden.

Der Uebersichtlichkeit halber sollen ferner weiterhin, falls es sich um Variable handelt und die Größen noch ganz allgemein, ohne Beziehung auf bestimmte physikalische Verhältnisse geführt werden,

Scalare mit S,
Vectoren mit V, U oder W,
ihre (orthogonalen) Componenten mit V_1, V_2, V_3 u. s. f.,
Tensortripel mit T, P, Q oder R,

wenn es auf die einzelnen Theile des Tripels ankömmt, auch mit T_1, T_2, T_3 u. s. f., ihre orthogonalen Componenten aber mit T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{31}, T_{12} u. s. f. bezeichnet werden.

Ein vollständiges System gerichteter Größen dritter Ordnung wollen wir mit H, seine zehn Componenten mit H_{111}, H_{222}, ... H_{123}, ein System vierter Ordnung mit L, seine fünfzehn Componenten mit L_{1111}, L_{2222}, ... L_{2312} bezeichnen, wobei das Gesetz der Indices sich durch die Vergleichung mit dem Schema (1) sogleich ergiebt.

Für den Fall, daß es sich um constante Parameter ohne specielle physikalische Bedeutung handelt, sollen die verschiedenen Größengattungen durch die den obigen entsprechenden kleinen Buchstaben dargestellt werden.

---

1) W. Voigt, l. c. p. 123.

Eine eingehende Untersuchung der gerichteten Größen dritter und vierter Ordnung soll hier nicht vorgenommen werden; für letztere fehlen anscheinend überhaupt noch geometrische Vorstudien. Für unsere Zwecke genügt die folgende Bemerkung.

Das Tensortripel T wird nach Größe und Lage characterisirt durch die centrische Oberfläche zweiten Grades von der durch die sechs Tensorcomponenten bestimmten Gleichung:

$$3) \qquad T_{11} x^2 + T_{22} y^2 + T_{33} z^2 + r T_{23} yz + r T_{31} zx + r T_{12} xy = \pm 1,$$

deren Hauptaxen der Lage nach direct mit den resultirenden Tensoren T_1, T_2, T_3 des Tripels zusammenfallen, während sie durch ihre reciproken Quadrate deren Größen darstellen.

Ein vollständiges System H gerichteter Größen dritter Ordnung wird analog charakterisirt sein durch eine Oberfläche dritten Grades mit der durch die bezüglichen Componenten bestimmten Gleichung:

$$4) \qquad \begin{gathered} H_{111} x^3 + H_{222} y^3 + H_{333} z^3 \\ + s (H_{112} x^2 y + H_{113} x^2 z + H_{223} y^2 z + H_{221} y^2 x + H_{332} z^2 y + H_{331} z^2 x) \\ + rs H_{123} xyz = \pm 1. \end{gathered}$$

Speciell kann man durch sieben geeignet gewählte Radienvectoren dieser Oberfläche das durch die zehn Componenten $H_{111}, \ldots H_{123}$ bestimmte resultirende System der gerichteten Größen dritten Grades darstellen. Dabei geben diese Radien durch ihre (einseitigen) Richtungen unmittelbar die Richtungen der betreffenden Resultirenden, durch die reciproken dritten Potenzen ihrer Zahlwerthe deren Größen an. Das System möge im Folgenden, um die Ordnung und den Character der betreffenden Größen anzudeuten, als ein System von Trivectoren bezeichnet werden.

Ein vollständiges System L gerichteter Größen vierter Ordnung ist charakterisirt durch die Oberfläche vierten Grades von der Gleichung:

$$5) \qquad \begin{aligned} & L_{1111} x^4 + L_{2222} y^4 + L_{3333} z^4 \\ & + 2 (L_{1112} x^3 y + L_{1113} x^3 z + \cdots + L_{3332} z^3 y) \\ & + rs (L_{2233} y^2 z^2 + L_{3311} z^2 x^2 + L_{1122} x^2 y^2) \\ & + 2s (L_{1123} x^2 yz + L_{2231} y^2 zx + L_{3312} z^2 xy) = \pm 1. \end{aligned}$$

Hier kann man 12 geeignet gewählte Radienvectoren zur Darstellung des durch die 15 Componenten $L_{1111}, \ldots L_{3312}$ bestimmten resultirenden Systemes heranziehen. Wiederum geben jene Radien durch ihre (zweiseitigen) Richtungen die Lagen der Resul-

tirenden an; die reciproken vierten Potenzen ihrer Zahlwerthe bestimmen deren Größen.

Wir werden weiterhin ein solches System gerichteter Größen vierter Ordnung, um Ordnung und Character kurz anzudeuten, als ein System von Bitensoren bezeichnen. —

Nunmehr mögen die verschiedenen Gebiete der Krystallphysik in Bezug auf ihre Parameter systematisch untersucht werden. Dabei sollen auch die einfachsten, wo die bezüglichen Resultate allbekannt sind, der Vollständigkeit halber berücksichtigt werden. Wirklich neue Aufklärungen bieten sich erst bei den complicirteren Beziehungen.

1) Ein Scalar, lineär in drei Vectorcomponenten:

6) $$S = h_1 V_1 + h_2 V_2 + h_3 V_3.$$

Der Ausdruck hat unmittelbar die für die Anwendung des Satzes von S. 356 gewünschte Form, da Vectorcomponenten sich orthogonal transformiren. Es sind demgemäß h_1, h_2, h_3 gleichfalls Vectorcomponenten nach den Coordinatenaxen; der resultirende Vector h ist für die in der Relation (6) ausgesprochene Eigenschaft der Substanz characteristisch, er hat polare oder axiale Natur, wenn Gleiches von V gilt.

Das wichtigste Beispiel liefern die sogenannten pyroelectrischen Umsetzungen[1]), (thermische Electricitätserregung und electrische Erwärmung) für welche die freie Energie der Volumeneinheit bei kleinen Temperaturänderungen τ gegeben ist durch den Ausdruck

7) $$\xi = -\tau (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z),$$

wobei X, Y, Z die electrischen Feldcomponenten und r_1, r_2, r_3 Parameter bezeichnen. Für die Componenten des electrischen Momentes nach den Coordinatenaxen ergiebt sich

8) $$\alpha = -\frac{\partial \xi}{\partial X} = r_1 \tau, \quad \beta = -\frac{\partial \xi}{\partial Y} = r_2 \tau, \quad \gamma = -\frac{\partial \xi}{\partial Z} = r_3 \tau;$$

da die $r_i \tau$ an der Stelle der h_i im Ansatz (6) stehen, so ist der für den Vorgang charakteristische und ebenso, wie die Feldstärke, polare Vector hier das erregte electrische Moment selbst, dessen Richtung der Substanz individuell ist, während seine Größe mit der Temperatur variirt. Die Resultirende r der r_i giebt dieses Moment für die Temperaturänderung Eins an.

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1894, Nr. 4, p. 346.

Für die specifische Entropie folgt:

9) $$\eta = -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = r_1 X + r_2 Y + r_3 Z.$$

Gemäß dem Satz von S. 356 ist η ein Scalar.

2) Ein Scalar, lineär in sechs Tensorcomponenten:

10) $$S = k_1 T_{11} + k_2 T_{22} + k_3 T_{33} + k_4 T_{23} + k_5 T_{31} + k_6 T_{12}.$$

Auch hier ist — da, wie oben gesagt, unter den T_{hi} orthogonale Tensorcomponenten verstanden sind — die angesetzte Form unmittelbar die von uns früher geforderte. Die Parameter k_h sind hiernach gleichfalls orthogonale Tensorcomponenten, und der in dem Ansatz ausgesprochene Vorgang wird durch ein Tensortripel erschöpfend characterisirt.

Das wichtigste Beispiel liefern die thermisch-mechanischen Umsetzungen innerhalb eines Krystalles (thermische Dilatation und mechanische Erwärmung), für welche die freie Energie der Volumeneinheit die Form hat[1])

11) $$\xi = -\tau (q_1 x_x + q_2 y_y + q_3 z_z + q_4 y_z + q_5 z_x + q_6 x_y);$$

dabei bezeichnet wiederum τ die (klein angenommene) Temperaturänderung, $x_x, \ldots x_y$ sind die Deformationsgrößen, $q_1, \ldots q_6$ Parameter. Da x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r orthogonale Tensorencomponenten sind, so gilt gleiches von q_1, q_2, q_3, $q_4 r$, $q_5 r$, $q_6 r$.

Für die Componenten des thermischen Druckes ergiebt sich

12) $$A_x = -\frac{\partial \xi}{\partial x_x} = q_1 \tau, \ldots \quad A_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x_y} = q_6 \tau,$$

wobei A_x, B_y, C_z, rB_z, rC_x, rA_y orthogonale Tensorcomponenten darstellen; die $q_i \tau$ stehen an Stelle der k_i im Ansatz (10); das resultirende Tensortripel ist also in unserem Falle dasjenige der thermischen Hauptdrucke, dessen Lage der Substanz individuell ist, während seine Zahlwerthe von der Temperaturänderung abhängen. Die Resultanten aus den q_h geben das Tripel der Hauptdrucke speciell für die Temperaturänderung Eins an.

Für die specifische Entropie folgt:

13) $$\eta = -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = q_1 x_x + q_2 y_y + \cdots + q_6 x_y.$$

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 4, p. 363.

3) Ein Scalar, bilinear in zwei Mal drei Vectorcomponenten:

$$14)\qquad \begin{aligned} S = {} & U_1(n_{11}V_1 + n_{12}V_2 + n_{13}V_3) \\ & + U_2(n_{21}V_1 + n_{22}V_2 + n_{23}V_3) \\ & + U_3(n_{31}V_1 + n_{32}V_2 + n_{33}V_3). \end{aligned}$$

Hier ist die direct gegebene Form für S noch nicht die von uns geforderte, denn die neun Producte von Vectorcomponenten $U_h \cdot V_k$ sind keine orthogonalen Variabeln. Da aber

$$15)\qquad \begin{gathered} U_1V_1 = T_{11},\ U_2V_2 = T_{22},\ U_3V_3 = T_{33}, \\ \frac{1}{r}(U_2V_3 + U_3V_2) = T_{23},\ \frac{1}{r}(U_3V_1 + U_1V_3) = T_{31}, \\ \frac{1}{r}(U_1V_2 + U_2V_1) = T_{12} \end{gathered}$$

orthogonale Tensorcomponenten,

$$16)\qquad \begin{gathered} \frac{1}{r}(U_2V_3 - U_3V_2) = W_1,\ \frac{1}{r}(U_3V_1 - U_1V_3) = W_2, \\ \frac{1}{r}(U_1V_2 - U_2V_1) = W_3 \end{gathered}$$

(orthogonale) Vectorcomponenten darstellen, so kann man S sogleich in zwei Theile von der gewünschten Natur zerlegen, indem man schreibt:

$$17)\qquad \begin{aligned} S = {} & [n_{11}T_{11} + n_{22}T_{22} + n_{33}T_{33} \\ & + \frac{1}{r}(n_{23} + n_{32})T_{23} + \frac{1}{r}(n_{31} + n_{13})T_{31} + \frac{1}{r}(n_{12} + n_{21})T_{12}] \\ & + \frac{1}{r}[(n_{23} - n_{32})W_1 + (n_{31} - n_{13})W_2 + (n_{12} - n_{21})W_3]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann ohne Weiteres, daß

$$18)\qquad \begin{gathered} n_{11} = t_{11},\ n_{22} = t_{22},\ n_{33} = t_{33}, \\ \frac{1}{r}(n_{23} + n_{32}) = t_{23},\ \frac{1}{r}(n_{31} + n_{13}) = t_{31},\ \frac{1}{r}(n_{12} + n_{21}) = t_{12} \end{gathered}$$

orthogonale Tensorcomponenten,

$$19)\qquad \frac{1}{r}(n_{23} - n_{32}) = v_1,\ \frac{1}{r}(n_{31} - n_{13}) = v_2,\ \frac{1}{r}(n_{12} - n_{21}) = v_3$$

(orthogonale) Vectorcomponenten sind, und daß somit die neun Parameter des Ansatzes (14) auf ein Tensortripel und auf einen Vector zurückführbar sind. Besteht

zwischen den Parametern n_{hk} speciell die Beziehung

20) $$n_{hk} = n_{kh},$$

so kommt der Vector in Wegfall. —

Es ist bekannt, daß Beziehungen von der Form (14) in der Krystallphysik außerordentlich häufig sind; meist läßt sich dabei S als die Arbeit deuten, die bei der Strömung einer imponderabeln Flüssigkeit in einem widerstehenden Mittel von einer treibenden Kraft geleistet wird. Die Componenten J_1, J_2, J_3 der Strömung J ergeben sich dabei nach dem Schema

21) $$J_1 = \frac{\partial S}{\partial U_1} = n_{11} V_1 + n_{12} V_2 + n_{13} V_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

als lineäre Functionen der Componenten V_1, V_2, V_3 der treibenden Kraft V, die p_{hk} erhalten die Bedeutung der Leitfähigkeitsconstanten. In diesem Falle ist die obige Zerlegung aequivalent mit der von Stokes[1]) vorgenommenen Behandlung der Wärmeleitungsgleichungen; das Tensortripel t ist identisch mit dem Tripel der Hauptleitfähigkeiten, v ist der von Stokes zur Charakterisirung des rotatorischen Verhaltens eines Krystalles eingeführte Vector, der im Falle $n_{hk} = n_{kh}$ verschwindet. —

In allen bekannten Fällen der hervorgehobenen Art sind die Vectoren U und V im Ansatz (24) — und demgemäß J in den Formeln (21) — von gleicher Natur, entweder beide polar oder beide axial; sie verhalten sich somit auch bei einer Umkehrung des Coordinatensystemes gleich, und die Parameter p_{hk} bleiben bei diesem Vorgang ungeändert. Daraus folgt, daß auch die Tensorcomponenten t_{hk} und die Vectorcomponenten v_h bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Zeichen beibehalten; v ist somit ein axialer Vector, t ein Tensortripel von derselben Art, wie sie die Dilatationen und die Drucke im Falle der Elasticität liefern.

Existirten factisch Wechselwirkungen von der Form (14) resp. (21) zwischen einem polaren und einem axialen Vector, wie z. B. zwischen constanten electrischen und magnetischen Feldern oder Momenten, von denen die electrischen bekanntlich polar, die magnetischen axial sind, so würde v zu einem polaren Vector werden, und t würde ein Tensortripel von bisher noch nicht angetroffener Art darstellen, dessen Componenten bei der Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihre Vorzeichen ändern. Dergleichen sind in solcher Einfachheit allerdings noch nicht aufgefunden. Indessen muß

1) G. Stokes, Cambr. and Dublin Math. Journ. Bd. 6, p. 215, 1851.

die Energie eines von einer Lichtbewegung durchsetzten natürlich-circularpolarisirenden Körpers nach Symmetrie ein Glied enthalten, das bilineär ist in den Componenten der electrischen und der magnetischen Feldstärke — oder in irgendwelchen ihrer Differentialquotienten nach der Zeit, die mit ihnen gleiche Transformationseigenschaften besitzen. Die im Allgemeinen neun Parameter dieser Function sind dann nach dem Obigen zurückführbar auf einen Vector und ein Tensortripel, deren Componenten bei Umkehrung aller Coordinatenrichtungen ihr Vorzeichen wechseln.

Die factische Existenz von Tensorsystemen dieser Art scheint noch nicht bemerkt worden zu sein; Herr Curie[1]) hat indessen die Möglichkeit des Vorkommens zweiseitiger gerichteter Größen von analogem Verhalten bereits vor längerer Zeit betont.

Er bezeichnet als symétrie du cylindre tordu diejenige eines gleichförmig gedrillten Cylinders, dessen Endquerschnitte um entgegengesetzt gleiche Winkel gegen den mittleren Querschnitt gedreht sind. Es ist klar, daß hiermit eine gerichtete Größe characterisirt ist, deren beide Seiten gleichwerthig sind, und deren Componenten bei einer Umkehrung der sämmtlichen Coordinatenrichtungen ihre Vorzeichen ändern, weil mit diesem Vorgang eine Umkehrung des positiven Drehungssinnes verbunden ist. Hier tritt uns ein Tripel dieser neuen Größen zweiter Ordnung in der Natur entgegen; andere Fälle werden uns später beschäftigen.

Herr Curie hat neuerdings für diese zweiseitigen Größen den glücklichen Namen Torsor vorgeschlagen[2]), den man passend dann anwenden wird, wenn man die einseitigen, mit Drehungssinn behafteten gerichteten Größen erster Ordnung als Rotoren bezeichnet.

Es würden sich dann entsprechen

als Größen erster Ordnung: Vector, Rotor,

als Größen zweiter Ordnung: Tensor, Torsor.

Diese Bezeichnung betont je das die beiden Größen erster resp. zweiter Ordnung Unterscheidende; will man das Gemeinsame hervorheben, was in den übereinstimmenden Transformationseigenschaften liegt, so wird man dagegen die folgenden Namen wählen:

Größen erster Ordnung: polare und axiale Vectoren,

Größen zweiter Ordnung: polare und axiale Tensoren.—

1) P. Curie, Journ. de phys. (3) Bd. 3 p. 393, 1894.

2) Procès-verbaux sommaires du Congrès international de physique Paris, 1900, p. 17.

Faßt man die Formeln (21) mit den Richtungscosinus

$$\alpha = V_1/V, \quad \beta = V_2/V, \quad \gamma = V_3/V$$

des Vectors V zusammen, so erhält man den Werth der Componente $J_l = J_1\alpha + J_2\beta + J_3\gamma$ von J nach der Richtung von V:

$$\begin{aligned} J_l = & \; V(n_{11}\alpha^2 + n_{22}\beta^2 + n_{33}\gamma^2 \\ 22) \quad & + (n_{23} + n_{32})\beta\gamma + (n_{31} + n_{13})\gamma\alpha + (n_{12} + n_{21})\alpha\beta) \\ = & \; V(t_{11}\alpha^2 + t_{22}\beta^2 + t_{33}\gamma^2 + t_{23}r\beta\gamma + t_{31}r\gamma\alpha + t_{12}r\alpha\beta). \end{aligned}$$

Trägt man je nach dem Vorzeichen von V/J_l den Werth

$$\sqrt{\pm V/J_l} = \varrho$$

als Strecke von einem Punkt aus auf der Richtung von V auf, so erfüllen ihre Endpunkte bei beliebig variirendem V eine Oberfläche, deren Gleichung bei Einführung der Coordinaten $x = \varrho\alpha$, $y = \varrho\beta$, $z = \varrho\gamma$ des freien Endpunktes von ϱ lautet:

$$23) \qquad \pm 1 = t_{11}x^2 + t_{22}y^2 + t_{33}z^2 + t_{23}ryz + t_{31}rzx + t_{12}rxy.$$

Das Verhältniß J_l/V kann man als die longitudinale Leitfähigkeit des Mediums parallel der Richtung der treibenden Kraft V bezeichnen; die nach (3) für das Tensortripel t characteristische Oberfläche gewinnt durch seine Einführung also eine sehr anschauliche Bedeutung.

4) Ein Scalar, bilinear in drei Vector- und sechs Tensorcomponenten:

$$\begin{aligned} S = & \; V_1(e_{11}T_{11} + e_{12}T_{22} + e_{13}T_{33} + e_{14}T_{23} + e_{15}T_{31} + e_{16}T_{12}) \\ 24) \quad & + V_2(e_{21}T_{11} + e_{22}T_{22} + e_{23}T_{33} + e_{24}T_{23} + e_{25}T_{31} + e_{26}T_{12}) \\ & + V_3(e_{31}T_{11} + e_{32}T_{22} + e_{33}T_{33} + e_{34}T_{23} + e_{35}T_{31} + e_{36}T_{12}). \end{aligned}$$

Auch hier hat der Ansatz nicht sogleich die Form, deren wir bedürfen. Um ihn passend umzugestalten, ist erstens zu benutzen — was nachzuweisen hier zu weit führen würde —, daß

$$\begin{aligned} & V_1T_{11} = H_{111}, \qquad V_2T_{22} = H_{222}, \qquad V_3T_{33} = H_{333}, \\ & (V_2T_{11} + rV_1T_{12})/s = H_{112}, \qquad (V_3T_{11} + rV_1T_{31})/s = H_{113}, \\ 25) \; & (V_3T_{22} + rV_2T_{23})/s = H_{223}, \qquad (V_1T_{22} + rV_2T_{12})/s = H_{221}, \\ & (V_1T_{33} + rV_3T_{31})/s = H_{331}, \qquad (V_2T_{33} + rV_3T_{23})/s = H_{332}, \\ & (V_1T_{23} + V_2T_{31} + V_3T_{12})/s = H_{123} \end{aligned}$$

die orthogonalen Componenten eines Trivectorsystemes darstellen; ferner ist heranzuziehen, daß

$$(V_2 T_{31} - V_3 T_{12}) = P_{11}, \quad (V_3 T_{12} - V_1 T_{23}) = P_{22}, \quad V_1 T_{23} - V_2 T_{31} = P_{33},$$

$$\begin{aligned} &((r V_1 T_{22} - V_2 T_{12}) - (r V_1 T_{33} - V_3 T_{31})) / r = P_{23}, \\ 26) \quad &((r V_2 T_{33} - V_3 T_{23}) - (r V_2 T_{11} - V_1 T_{12})) / r = P_{31}, \\ &((r V_3 T_{11} - V_1 T_{31}) - (r V_3 T_{22} - V_2 T_{23})) / r = P_{12} \end{aligned}$$

orthogonale Componenten eines Tensortripels,

$$\begin{aligned} &((r V_1 T_{22} - V_2 T_{12}) + (r V_1 T_{33} - V_3 T_{31})) / r = U_1, \\ 27) \quad &((r V_2 T_{33} - V_3 T_{23}) + (r V_2 T_{11} - V_1 T_{12})) / r = U_2, \\ &((r V_3 T_{11} - V_1 T_{31}) + (r V_3 T_{22} - V_2 T_{23})) / r = U_3, \end{aligned}$$

aber Vectorcomponenten sind. Zwischen den Tensorcomponenten erster Art besteht dabei die Beziehung

$$28) \qquad P_{11} + P_{22} + P_{33} = 0.$$

Das Verhalten aller dieser Componenten bei einer Umkehrung des Coordinatensystemes folgt leicht aus dem der V_h und der T_{hk}; ein Trivectorsystem, dessen Componenten dabei ihre Vorzeichen wechseln, wird man polar, eines, das sie behält, axial nennen können.

Unter Rücksicht auf die obigen Resultate kann man den Scalar (24) folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{s} [& s e_{11} H_{111} + s e_{22} H_{222} + s e_{33} H_{333} \\ & + (e_{32} + r e_{24}) H_{112} + (e_{31} + r e_{15}) H_{113} + (e_{13} + r e_{35}) H_{323} + (e_{12} + r e_{26}) H_{221} \\ & + (e_{21} + r e_{16}) H_{331} + (e_{23} + r e_{34}) H_{332} + (e_{14} + e_{25} + e_{36}) H_{123}] \\ & + \tfrac{1}{3} [(e_{25} - e_{36}) P_{11} + (e_{36} - e_{14}) P_{22} + (e_{14} - e_{25}) P_{33} \\ & + (e_{12} - e_{13} - \tfrac{1}{2} r (e_{26} - e_{35})) P_{23} + (e_{23} - e_{21} - \tfrac{1}{2} r (e_{34} - e_{16})) P_{31} \\ & + (e_{31} - e_{32} - \tfrac{1}{2} r (e_{15} - e_{24})) P_{12}] \\ & + \tfrac{1}{3} [(e_{12} + e_{13} - \tfrac{1}{2} r (e_{26} + e_{35})) U_1 + (e_{23} + e_{21} - \tfrac{1}{2} r (e_{34} + e_{16})) U_2 \\ & + (e_{31} + e_{32} - \tfrac{1}{2} r (e_{15} + e_{24})) U_3]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die 18 Parameter des Ansatzes (24) zurückführbar sind auf ein Trivectorsystem, auf ein Tensortripel und auf einen einzelnen Vector.

Dabei ist aber zu betonen, daß das Tensortripel den in der Elasticitätstheorie vorkommenden nicht nothwendig gleichartig ist, insofern die Vorzeichen seiner Componenten bei Umkehr aller Coordinatenrichtungen je nach der Natur der Größen V und T ebensowohl erhalten bleiben, als sich ändern können; es kann somit ebensowohl polar, als auch axial sein. In dem wichtigsten Fall, auf den die vorstehenden Betrachtungen Anwendung finden, nämlich

dem der unten zu besprechenden mechanisch-electrischen Wechselwirkungen an acentrischen Krystallen findet, wie wir sehen werden, das Letztere statt. —

Die orthogonalen Componenten der drei Systeme gerichteter Größen, auf welche oben die Parameter e_{hk} zurückgeführt sind, stellen sich nunmehr folgendermaßen dar:

$$e_{11} = r_{111}, \quad e_{22} = r_{222}, \quad e_{33} = r_{333},$$
$$\frac{1}{s}(e_{21} + r e_{16}) = r_{112}, \quad \frac{1}{s}(e_{31} + r e_{15}) = r_{113}, \quad \frac{1}{s}(e_{32} + r e_{24}) = r_{223},$$
$$\frac{1}{s}(e_{12} + r e_{26}) = r_{221}, \quad \frac{1}{s}(e_{13} + r e_{35}) = r_{331}, \quad \frac{1}{s}(e_{23} + r e_{34}) = r_{332},$$

30) $$\frac{1}{s}(e_{14} + e_{25} + e_{36}) = r_{123};$$

$$\tfrac{1}{3}(e_{25} - e_{36}) = t_{11}, \quad \tfrac{1}{3}(e_{36} - e_{14}) = t_{22}, \quad \tfrac{1}{3}(e_{14} - e_{25}) = t_{33},$$
$$\tfrac{1}{3}(e_{12} - e_{13} - \tfrac{1}{2} r (e_{26} - e_{35})) = t_{23}, \quad \tfrac{1}{3}(e_{23} - e_{21} - \tfrac{1}{2} r (e_{34} - e_{16})) = t_{31},$$
$$\tfrac{1}{3}(e_{31} - e_{32} - \tfrac{1}{2} r (e_{15} - e_{24})) = t_{12};$$

$$\tfrac{1}{3}(e_{12} + e_{13} - \tfrac{1}{2} r (e_{26} + e_{35})) = v_1, \quad \tfrac{1}{3}(e_{23} + e_{21} - \tfrac{1}{2} r (e_{34} + e_{16})) = v_2,$$
$$\tfrac{1}{3}(e_{31} + e_{32} - \tfrac{1}{2} r (e_{15} + e_{24})) = v_3.$$

Ihre Zahl beträgt neunzehn; sie ist also um Eins höher, als die Anzahl der durch sie dargestellten Parameter e_{hk}. Der Widerspruch findet darin seine Lösung, daß zwischen den Componenten erster Art des Tensortripels die mit (28) correspondirende Beziehung besteht

31) $$t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0;$$

deutet man also die Tensoren als Dilatationen, so ist die hier heranzuziehende von einer Volumenänderung nicht begleitet, denn $t_{11} + t_{22} + t_{33}$ wird hier gleich $x_x + y_y + z_z$. In Bezug auf die für das Tensortripel charakteristische Oberfläche zweiten Grades (3) drückt sich dies dahin aus, daß deren Gleichung auf ihre Hauptaxen bezogen, also in der Gestalt $t_1 x^2 + t_2 y^2 + t_3 z^2 = \pm 1$, der Beziehung $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ unterworfen ist, die eine leicht angebbare geometrische Bedeutung besitzt. Alle Componenten r_{hik}, t_{hi}, v_h verhalten sich bei der Umkehrung des Coordinatensystemes, wie die e_{hk}, deren Natur sich gemäß (24) aus derjenigen der V_h und T_{hk} ergiebt. —

Gemäß dem allgemeinen Satz von S. 356 sind

32) $$U_1 = \frac{\partial S}{\partial V_1} = e_{11} T_{11} + e_{12} T_{22} + \cdots + e_{16} T_{12},$$

. . . .

(orthogonale) Componenten eines Vectors U,

$$33)\quad \begin{aligned} P_{11} &= \frac{\partial S}{\partial T_{11}} = e_{11}V_1 + e_{21}V_2 + e_{31}V_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{12} &= \frac{\partial S}{\partial T_{12}} = e_{16}V_1 + e_{26}V_2 + e_{36}V_3 \end{aligned}$$

orthogonale Componenten eines Tensortripels P_1, P_2, P_3.

Die axiale oder polare Natur von U und P_1, P_2, P_3 ist aus derjenigen von T_{hk}, V_h und e_{hk} leicht abzuleiten.

Reducirt sich das Tensortripel T_1, T_2, T_3 auf einen einzigen Tensor T, so lauten seine Componenten (unter $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$ die Richtungscosinus des ja zweiseitigen Tensors verstanden):

$$34)\quad \begin{aligned} T_{11} &= T\alpha^2, & T_{22} &= T\beta^2, & T_{33} &= T\gamma^2, \\ T_{23} &= Tr\beta\gamma, & T_{31} &= Tr\gamma\alpha, & T_{12} &= Tr\alpha\beta. \end{aligned}$$

Faßt man nun die Gleichungen (32) mit den Factoren α, β, γ zusammen und setzt die (longitudinale) Componente von U nach einer der beiden entgegengesetzten Richtungen von T

$$U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma = U_l,$$

so erhält man

$$35)\quad \begin{aligned} U_l = T\,(e_{11}\alpha^3 + e_{22}\beta^3 + e_{33}\gamma^3 + (e_{21} + re_{16})\,\alpha^2\beta + (e_{31} + re_{15})\,\alpha^2\gamma + \cdots \\ + (e_{14} + e_{25} + e_{36})\,r\alpha\beta\gamma). \end{aligned}$$

Trägt man $\sqrt[3]{\pm T / U_l} = \varrho$ als Strecke auf die bevorzugte Seite der Richtung von T auf, so erfüllen deren Endpunkte bei beliebig variirendem T eine Oberfläche, deren Gleichung bei Einführung der Coordinaten $x = \varrho\alpha$, $y = \varrho\beta$, $z = \varrho\gamma$ lautet:

$$\begin{aligned} \pm 1 = e_{11}x^3 + e_{22}y^3 + e_{33}z^3 + (e_{12} + re_{26})\,xy^2 + (e_{13} + re_{35})\,xz^2 + \cdots \\ + (e_{14} + e_{25} + e_{36})\,rxyz, \end{aligned}$$

also bei Rücksicht auf (30) auch

$$36)\quad \begin{aligned} \pm 1 = r_{111}x^3 + r_{222}y^3 + r_{333}z^3 + r_{122}sxy^2 + r_{133}sxz^2 + \cdots \\ + (e_{14} + e_{25} + e_{36})\,rsxyz. \end{aligned}$$

Die für das Trivectorsystem des Mediums characteristische Oberfläche hat hierdurch eine einfache physikalische Deutung erhalten.

Eine zweite kann man aus dem System (33) ableiten, indem man dem Vector V die Richtungscosinus α, β, γ beilegt und die

betreffenden Formeln mit den Factoren α^2, β^2, γ^2, $r\beta\gamma$, $r\gamma\alpha$, $r\alpha\beta$ zusammenfaßt. Man erhält dann für die Componente erster Art des Tensortripels P_1, P_2, P_3 nach der Richtung von V, d. h. für

$$37) \quad P_u = P_{11}\alpha^2 + P_{22}\beta^2 + P_{33}\gamma^2 + P_{23}r\beta\gamma + P_{31}r\gamma\alpha + P_{12}r\alpha\beta$$

den mit (35) gleichgestalteten Ausdruck

$$38) \quad P_u = V(e_{11}\alpha^3 + \cdots + (e_{12} + re_{26})\alpha^2\beta + \cdots + (e_{14} + e_{25} + e_{36})r\alpha\beta\gamma),$$

der sich wie jener weiter behandeln läßt.

Während nach dem Vorstehenden das für den Krystall charakteristische Trivectorsystem sich leicht und vollständig veranschaulichen läßt, ist Analoges in Bezug auf das an sich viel einfachere Tensortripel und in Bezug auf den Einzelvector anscheinend nicht möglich; man kann die nach (30) in ihren Componenten auftretenden Constanten nur auf ziemlich umständliche und künstliche Weise von den anderen sondern. —

Die im Allgemeinen sehr complicirten Verhältnisse vereinfachen sich, wenn man der Beobachtung specielle Krystallsysteme unterwirft. Wir beschränken uns dabei auf den wichtigsten Fall, daß V und T beide polar sind.

Ist die Z-Coordinatenaxe eine dreizählige Symmetrieaxe (Symbol A_z^3), so nimmt das System der e_{hk} folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{cccccc} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & e_{15} & -re_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & -e_{14} & -re_{11} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Componenten

$$39) \quad \begin{gathered} r_{111} = e_{11}, \qquad r_{222} = e_{22}, \qquad r_{333} = e_{33}, \\ r_{112} = -se_{22}, \qquad r_{221} = -se_{11}, \qquad r_{331} = r_{332} = 0, \\ r_{113} = r_{223} = \frac{1}{s}(e_{31} + re_{15}), \qquad r_{123} = 0; \end{gathered}$$

$$t_{11} = t_{22} = -\tfrac{1}{3}s_{14}, \qquad t_{33} = +\tfrac{2}{3}s_{14}, \qquad t_{23} = t_{31} = t_{12} = 0;$$

$$v_1 = v_2 = 0, \qquad v_3 = \tfrac{1}{3}(2e_{31} - re_{15}).$$

Das Trivectorsystem zeigt hier den der dreizähligen Axe entsprechenden Charakter, während das Tensortripel und der Vector die Symmetrie eines Rotationskörpers angenommen haben.

Diese Werthe umfassen andere wichtige specielle Fälle. Ist die Z-Axe vier- oder sechszählig, so verschwindet in dem System

(39) noch e_{11} und e_{33}, wodurch das Trivectorsystem gleichfalls die Symmetrie eines Rotationskörpers erhält.

Ist außerdem die YZ-Ebene eine Symmetrieebene (Symbol E_x), so verschwindet e_{14} und damit überhaupt das Tensortripel; die Krystalle von der Symmetrie $A_z^4 E_x$ und $A_z^6 E_x$ sind also für die behandelten Vorgänge allein durch ein Trivectorsystem und einen einzelnen Vector charakterisirt.

Ist mit der vier- und sechszähligen Z-Axe noch eine zweizählige X-Axe (Symbol A_x^2) verbunden, so ist nur e_{14} von Null verschieden; Krystalle von der Symmetrie $A_z^4 A_x^2$ und $A_z^6 A_x^2$ sind also für die behandelten Beziehungen vollständig durch ein ganz specielles Tensortripel charakterisirt. —

Der Ansatz (24) findet seine wichtigste Anwendung in der Theorie der mechanisch-electrischen Wechselwirkungen an acentrischen Krystallen (Piezoelectricität und electrische Deformation), deren freie Energie die Form besitzt[1])

$$\begin{aligned} \xi = -[&X(\varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \varepsilon_{13}z_z + \varepsilon_{14}y_z + \varepsilon_{15}z_x + \varepsilon_{16}x_y) \\ 40)\qquad &+ Y(\varepsilon_{21}x_x + \varepsilon_{22}y_y + \varepsilon_{23}z_z + \varepsilon_{24}y_z + \varepsilon_{25}z_x + \varepsilon_{26}x_y) \\ &+ Z(\varepsilon_{31}x_x + \varepsilon_{32}y_y + \varepsilon_{33}z_z + \varepsilon_{34}y_z + \varepsilon_{35}z_x + \varepsilon_{36}x_y)]. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die $x_x, \ldots, x_y$ die Deformationsgrößen, X, Y, Z die Componenten der electrischen Feldstärke. Wie schon oben bemerkt, sind hier Vector und Tensor der Variabeln polar; das Tensortripel der Parameter ist sonach axial, das Trivectorsystem und der Einzelvector sind polar. Die ε_{hk} stellen Parameter (die piezoelectrischen Constanten) dar.

Da $x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r$ orthogonale Tensorcomponenten sind, so stehen die ε_{hk}, deren Indices nur die Ziffern 1, 2, 3 enthalten, direct an der Stelle der entsprechenden e_{hk}, dagegen die ε_{hk} mit einem Index der Reihe 4, 5, 6 an Stelle der entsprechenden e_{hk}/r.

Die durch Deformation erregten specifischen electrischen Momente α, β, γ nach den Coordinatenaxen ergeben sich aus (40) nach den Formeln

$$41)\qquad \alpha = -\frac{\partial \xi}{\partial X} = \varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \cdots + \varepsilon_{16}x_y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1894 Nr. 4, p. 346.

die im electrischen Felde eintretenden Druckcomponenten nach den anderen

$$A_x = -\frac{\partial \xi}{\partial x_x} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{21} Y + \varepsilon_{31} Z,$$

42) $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x_y} = \varepsilon_{16} X + \varepsilon_{26} Y + \varepsilon_{36} Z.$$

Der Fall der mechanisch-magnetischen Wechselwirkungen wird gleichfalls durch den Ansatz (40) umfaßt, nur ist hier der variable Vector nicht polar, sondern axial — ein Umstand, der sich bei der Specialisirung des allgemeinen Ausdruckes auf die einzelnen Krystallgruppen höchst wesentlich erweist.

Die Vectorcomponente U_l, deren Werth in (35) angegeben ist, hat in unserem Fall die Bedeutung des Momentes, das durch eine einfache Dilatation hervorgerufen wird, nach deren Richtung; die Tensorcomponente P_{ll} stellt die Normalspannung in der Richtung der Kraftlinien des Feldes dar. Die für das Trivectorsystem des Krystalles charakteristische Oberfläche (36) ist hierdurch auf zwei verschiedene Weisen gedeutet. —

So lange es sich um isothermische Vorgänge handelt, kann man in den Formeln (40) und (41) die Deformationsgrößen durch die ihnen entsprechenden elastischen Druckcomponenten $X_x, \ldots X_y$ nach den Gleichungen

43) $$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + \cdots + s_{16} X_y, \quad \cdots\cdots$$

ausdrücken und erhält dann Gleichungen von der Form:

44) $$\xi = +[X(\delta_{11} X_x + \cdots + \delta_{16} X_y) + Y(\delta_{21} X_x + \cdots + \delta_{26} X_y) + Z(\delta_{31} X_x + \cdots + \delta_{36} X_y)]$$

und

45) $$-\alpha = \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \cdots + \delta_{16} X_y, \quad \cdots\cdots$$

worin die δ_{hk} neue Parameter (die piezoelectrischen Moduln) bezeichnen. Hier ergeben sich dann auch die Antheile $a_x, \ldots, a_y$ an den Deformationsgrößen, die auf den Feldwirkungen beruhen, nach (43) gemäß den Formeln:

46) $$a_x = \delta_{11} X + \delta_{21} Y + \delta_{31} Z, \quad \cdots\cdots$$

Da $X_x, Y_y, Z_z, rY_z, rZ_x, rX_y$ orthogonale Tensorcomponenten sind, so stehen jetzt die δ_{kh} für h und k gleich 1, 2, 3 an der

Stelle der entsprechenden e_{hk}, die mit h oder k gleich 4, 5, 6 an Stelle der bezüglichen re_{hk}.

Diese neue Form der Darstellung führt natürlich auf ganz andere charakteristische Richtungsgrößen erster bis dritter Ordnung. Die dem betreffenden Trivectorsystem zugehörige Oberfläche vom Typus (36) gewinnt hier eine noch anschaulichere Bedeutung, als bei der früheren Darstellung, insofern die durch (35) definirte Function hier unmittelbar das longitudinale Moment in einem nur durch Einwirkungen auf die Endquerschnitte gleichförmig gedehnten Cylinder angiebt, dessen Axe die Richtungscosinus α, β, γ besitzt. Dies ist aber eine ganz direct beobachtbare Größe. —

5) Ein Scalar, bilinear in zwei Mal sechs Tensorcomponenten:

$$
47)\quad
\begin{aligned}
S = {} & P_{11}(a_{11}T_{11} + a_{12}T_{22} + \cdots + a_{16}T_{12}) \\
& + P_{22}(a_{21}T_{11} + a_{22}T_{22} + \cdots + a_{26}T_{12}) \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + P_{12}(a_{61}T_{11} + a_{62}T_{22} + \cdots + a_{66}T_{12}).
\end{aligned}
$$

Zur Behandlung dieses complicirten Ausdruckes empfiehlt es sich, von vornherein eine Zerlegung derart vorzunehmen, daß man die speciellen Fälle

$$a_{hh} \gtrless 0, \qquad a_{hk} = a_{kh}$$

und

$$a_{hh} = 0, \qquad a_{hk} = -a_{kh}$$

betrachtet; die Superposition der beiden Resultate liefert dann das Allgemeinste.

a) Im ersten Falle kommen in den Formeln nur die symmetrischen Combinationen der zwei Arten von Tensorcomponenten zu je zwei vor, z. B. $P_{mn}T_{mn}$ und $P_{hi}T_{mn} + P_{mn}T_{hi}$. Wir führen demgemäß die leicht verständlichen Abkürzungen

$$
48)\quad
\begin{aligned}
& P_{11}T_{11} = A_{11}, \ldots && P_{23}T_{23} = A_{44}, \ldots \\
& P_{22}T_{33} + T_{22}P_{33} = A_{23}, \ldots && P_{31}T_{12} + T_{31}P_{12} = A_{56}, \ldots \\
& P_{11}T_{23} + T_{11}P_{23} = A_{14}, \ldots && P_{11}T_{31} + T_{11}P_{31} = A_{15}, \ldots \\
& \qquad P_{11}T_{12} + T_{11}P_{12} = A_{16}, \ldots
\end{aligned}
$$

ein, die auf die Stellung der einzelnen Producte in den Reihen und Colonnen des Ansatzes (47) Bezug nehmen, und erhalten so:

$$
49)\quad
\begin{aligned}
S = {} & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{16}A_{16} \\
& \qquad + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{26}A_{26} \\
& \qquad\qquad + \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
$$

Nun läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen, daß

$$
\begin{array}{lll}
A_{11} = L_{1111}, & A_{22} = L_{2222}, & A_{33} = L_{3333}, \\
A_{15}/r = L_{1131}, & A_{16}/r = L_{1112}, & A_{26}/r = L_{2212}, \\
A_{24}/r = L_{2223}, & A_{34}/r = L_{3323}, & A_{35}/r = L_{3331}, \\
(A_{23}+2A_{44})/rs = L_{2233}, & (A_{31}+2A_{55})/rs = L_{3311}, & \\
(A_{12}+2A_{66})/rs = L_{1122}, & (rA_{56}+A_{14})/rs = L_{3112}, & \\
(rA_{64}+A_{25})/rs = L_{1223}, & (rA_{45}+A_{36})/rs = L_{2331} &
\end{array} \tag{50}
$$

die 15 orthogonalen Componenten eines Bitensorsystemes darstellen, während

$$
\begin{array}{lll}
A_{23}-A_{44} = Q_{11}, & A_{31}-A_{55} = Q_{22}, & A_{12}-A_{66} = Q_{33}, \\
(A_{56}-rA_{14})/r = Q_{23}, & (A_{64}-rA_{25})/r = Q_{31}, & (A_{45}-rA_{36})/r = Q_{12}
\end{array} \tag{51}
$$

die orthogonalen Componenten eines Tensortripels sind.

Hiernach kann man die durch (47) resp. (49) definirte Function S in folgender Weise zerlegen:

$$
\begin{aligned}
S = [&a_{11} L_{1111} + a_{22} L_{2222} + a_{33} L_{3333} \\
&+ (a_{15} L_{1131} + a_{16} L_{1112} + a_{26} L_{2212} + a_{24} L_{2223} + a_{34} L_{3323} + a_{35} L_{3331}) r \\
&+ ((a_{23} + a_{44}) L_{2233} + (a_{31} + a_{55}) L_{3311} + (a_{12} + a_{66}) L_{1122} \\
&+ (a_{14} + r a_{56}) L_{1123} + (a_{25} + r a_{64}) L_{2231} + (a_{36} + r a_{45}) L_{3312}) r/s] \\
&+ \tfrac{1}{3} [(2a_{23} - a_{44}) Q_{11} + (2a_{31} - a_{55}) Q_{22} + (2a_{12} - a_{66}) Q_{33} \\
&+ \quad (r a_{56} - 2a_{14}) Q_{23} + (r a_{64} - 2a_{25}) Q_{31} + (r a_{46} - 2a_{36}) Q_{12}].
\end{aligned} \tag{52}
$$

Dies zeigt, daß die 21 Parameter des Ansatzes (47) resp. (49) bei Annahme der Beziehung $a_{hk} = a_{kh}$ zurückführbar sind auf ein Bitensorsystem und auf ein gewöhnliches Tensortripel. Das Verhalten der beiderseitigen Componenten bei Umkehrung des Coordinatensystemes hängt in leicht ersichtlicher Weise von demjenigen der T_{hk} und P_{mn} ab.

Die Ausdrücke für diese Componenten lauten folgendermaßen:

$$
\begin{array}{lll}
a_{11} = l_{1111}, \ldots, & r a_{15} = l_{1131}, \ldots, & r a_{16} = l_{1112}, \ldots \\
(a_{23}+a_{44}) r/s = l_{2233}, \ldots, & (a_{14}+r a_{56}) r/s = l_{1123}, \ldots & \\
\tfrac{1}{3}(2a_{23}-a_{44}) = q_{11}, \ldots, & \tfrac{1}{3}(r a_{56}-2a_{14}) = q_{23}, \ldots &
\end{array} \tag{53}
$$

Die Differentialquotienten von S nach den P_{hk} oder den T_{hk} sind nach dem ersten Satz auf S. 356 orthogonale Tensorcomponenten; wir setzen z. B.

$$
54)\quad \begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial P_{11}} &= a_{11} T_{11} + a_{12} T_{22} + \cdots + a_{16} T_{12} = R_{11}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\frac{\partial S}{\partial P_{12}} &= a_{61} T_{11} + a_{62} T_{22} + \cdots + a_{66} T_{12} = R_{12}.
\end{aligned}
$$

Reducirt sich das Tensortripel T_1, T_2, T_3 auf einen einzigen Tensor T mit den Richtungscosinus $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, so ist $T_{11} = T\alpha^2$, ... $T_{12} = Tr\alpha\beta$. Faßt man dann die Formeln (54) mit den Factoren α^2, β^2, γ^2, $r\beta\gamma$, $r\gamma\alpha$, $r\alpha\beta$ zusammen, so erhält man die Componente erster Art $R_{/\!/}$ des Tensortripels R_1, R_2, R_3 nach der Richtung von T, gegeben durch

$$
55)\quad \begin{aligned}
R_{/\!/} = T(&a_{11}\alpha^4 + \cdots + 2a_{15} r\alpha^3\gamma + 2a_{16} r\alpha^3\beta + \cdots \\
&+ 2(a_{23} + a_{44})\beta^2\gamma^2 + \cdots + 2(ra_{14} + 2a_{56})\alpha^2\beta\gamma + \cdots)
\end{aligned}
$$

Trägt man $\sqrt[4]{\pm T/P_{/\!/}} = \varrho$ als Strecke auf den beiden Seiten von T auf, so erfüllen die Endpunkte von ϱ bei beliebig variirendem T eine Oberfläche, deren Gleichung bei Einführung der Coordinaten $\varrho\alpha = x$, $\varrho\beta = y$, $\varrho\gamma = z$ lautet:

$$
\begin{aligned}
\pm 1 = {} &a_{11} x^4 + \cdots + 2a_{15} r x^3 z + 2a_{16} r x^3 y + \cdots \\
&+ 2(a_{23} + a_{44}) y^2 z^2 + \cdots + 2(ra_{14} + 2a_{56}) x^2 yz + \cdots,
\end{aligned}
$$

oder unter Rücksicht auf (53) auch:

$$
56)\quad \begin{aligned}
\pm 1 = {} &l_{1111} x^4 + \cdots + l_{1131} 2x^3 z + l_{1112} 2x^3 y + \cdots \\
&+ l_{2233} rsy^2 z^2 + \cdots + l_{1123} 2sx^2 yz + \cdots
\end{aligned}
$$

Die für das Bitensorsystem der l charakteristische Oberfläche ist also durch die Componente $R_{/\!/}$ physikalisch gedeutet. Eine analoge Interpretation der für das Tensortripel t_1, t_2, t_3 characteristischen Fläche scheint auf einfache Weise nicht möglich zu sein.

Ein wichtiger specieller Fall ist der, daß die beiden Tensortripel P_1, P_2, P_3 und T_1, T_2, T_3 des Ansatzes (47) identisch sind; dann haben die Differentialquotienten $\partial S / \partial P_{hk}^1$ die doppelten Werthe, wie in (54) angegeben.

Alle vorstehenden Formeln vereinfachen sich erheblich, wenn man sie auf bestimmte Krystallgruppen von höherer Symmetrie anwendet; jedoch kommt der oben besprochene Fall, daß eines der beiden für die Substanz characteristischen Gebilde verschwindet, nicht vor. —

Der Ansatz (47) findet unter der Annahme, daß $a_{hk} = a_{kh}$ und $P_{hk} = T_{hk}$ ist, seine wichtigste Anwendung im Gebiete der Krystallelasticität, wo der Ausdruck für die (freie) Energie ξ

der Volumeneinheit bekanntlich lautet

$$57)\quad \begin{aligned} 2\xi = c_{11}x_x^2 &+ 2c_{12}x_xy_y + 2c_{13}x_xz_z + \cdots + 2c_{16}x_xx_y \\ &+ \quad c_{22}y_y^2 \quad + 2c_{23}y_yz_z + \cdots + 2c_{26}y_yx_y \\ &\qquad\qquad + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

und $x_x, \ldots, x_y$ die Deformationsgrößen, die c_{hk} die Elasticitätsconstanten bezeichnen. Da die x_x, y_y, z_z, y_z/r, z_x/r, x_y/r die orthogonalen Componenten des Dilatationstripels sind, so stehen in (57) die c_{hk} mit zwei Indices der Reihe 1, 2, 3 an Stelle der entsprechenden a_{hk}, solche mit einem Index der Reihe 1, 2, 3, und einem der Reihe 4, 5, 6 an Stelle der zugehörigen a_{hk}/r, solche schließlich mit zwei Indices der Reihe 4, 5, 6 an Stelle der betreffenden $a_{hk}/2$.

Das Schema (53) nimmt demgemäß die Gestalt an:

$$58)\quad \begin{aligned} c_{11} &= l_{1111}, \ldots & 2c_{15} &= l_{1131}, \ldots \\ (c_{23}+2c_{44})r/s &= l_{2233}, \ldots & (c_{14}+2c_{46})2/s &= l_{1123}, \ldots \\ \tfrac{2}{3}(c_{23}-c_{44}) &= q_{11}, \ldots & \tfrac{2}{3}r(c_{56}-c_{14}) &= q_{23}, \ldots \end{aligned}$$

Es ist bekannt, daß die Elasticitätsconstanten von Krystallen, deren kleinste Theile Kräfte auf einander ausüben, die nur unmerklich mit der Richtung variiren, die Beziehungen

$$c_{23} = c_{44}, \quad c_{31} = c_{55}, \quad c_{12} = c_{66},$$
$$c_{14} = c_{56}, \quad c_{25} = c_{64}, \quad c_{36} = c_{45}$$

erfüllen. Zieht man die Werthe der Tensorcomponenten q_{hk} aus (53) hervor, so erkennt man das merkwürdige Resultat[1]), daß Krystalle der genannten Art in ihrem elastischen Verhalten vollständig durch ein Bitensorsystem allein characterisirt werden. Das im Allgemeinen noch hinzutretende Tensortripel hängt also ganz wesentlich von der „Polarität" der kleinsten Theilchen des Krystalles ab. —

Die elastischen Druckcomponenten folgen aus (53) nach dem Schema

$$59)\quad -X_x = \frac{\partial \xi}{\partial x_x} = c_{11}x_x + c_{12}y_y + \cdots + c_{16}x_y,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Reducirt sich das Dilatationstripel auf eine einfache Dilatation p mit den Richtungscosinus $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, so lassen sich die an das System (54) angeknüpften Bemerkungen anwenden, und

1) Vergl. hierzu S. Venant, Liouv. Journ. (2) Bd. 8, S. 257, 1863.

man erhält für die normale Druckcomponente P_p in der Richtung von p nach (55) den Werth

$$60)\quad \begin{aligned} -P_p = p\,(c_{11}\alpha^4 + \cdots + 4c_{15}\alpha^3\gamma + 4c_{16}\alpha^3\beta + \cdots \\ + 2(c_{23} + 2c_{44})\beta^2\gamma^2 + \cdots + 4(c_{14} + 2c_{56})\alpha^2\beta\gamma + \cdots), \end{aligned}$$

womit eine Deutung des für den Krystall characteristischen Bitensorsystemes an die Hand gegeben ist. —

In mancher Hinsicht wichtiger noch als der Ausdruck (57) ist der bei isothermischen Vorgängen mit ihm gleichwerthige für die (freie) Energie, in dem die Druckcomponenten als Variable auftreten, nämlich

$$61)\quad \begin{aligned} 2\xi = s_{11}X_x^2 + 2s_{12}X_xY_y + 2s_{13}X_xZ_z + \cdots + 2s_{16}X_xX_y \\ + \; s_{22}\;Y_y^2 \; + 2s_{23}Y_yZ_z + \cdots + 2s_{26}Y_yX_y \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

Seine Parameter s_{hk} heißen die Elasticitätsmoduln der Substanz. Da $X_x, Y_y, Z_z, rY_z, rZ_x, rX_y$ die orthogonalen Componenten des Druck- oder Spannungstripels sind, so entsprechen sich, falls h und k gleich 1, 2, 3, und m und n gleich 4, 5, 6 sind,

$$s_{hk} \text{ und } a_{hk}, \qquad s_{hm} \text{ und } r a_{hm}, \qquad s_{mn} \text{ und } 2a_{mn}.$$

Demgemäß lautet das Schema (53) nunmehr folgendermaßen:

$$62)\quad \begin{array}{ll} s_{11} = l'_{1111}, \ldots & s_{15} = l'_{1131}, \ldots \\ (2s_{23} + s_{44})/rs = l'_{2233}, \ldots & (s_{14} + s_{56})/s = l'_{1123}, \ldots \\ \frac{1}{3}(4s_{23} - s_{44}) = q'_{11}, \ldots & \frac{1}{3}(s_{56} - 2s_{14})/r = q'_{23}, \ldots . \end{array}$$

Für die Deformationsgrößen gelten hier die Gleichungen

$$63)\quad \begin{aligned} -x_x = \frac{\partial \xi}{\partial X_x} = s_{11}X_x + s_{12}Y_y + \cdots + s_{16}X_y, \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

Reducirt sich das Drucktripel auf einen einzigen Normaldruck L_l mit den Richtungscosinus $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, so gewinnen die Ueberlegungen von S. 273 Anwendung, und wir erhalten für die lineare Dilatation in der Richtung von L_l den Ausdruck

$$64)\quad \begin{aligned} -l = L_l(s_{11}\alpha^4 + \cdots + 2s_{15}\alpha^3\gamma + 2s_{16}\alpha^3\beta + \cdots \\ + (2s_{23} + s_{44})\beta^2\gamma^2 + \cdots + 2(s_{14} + s_{56})\alpha^2\beta\gamma + \cdots). \end{aligned}$$

Der hieraus für $-l/L_l$ resultirende Werth ist der Modul s_l der longitudinalen Dilatation bei einseitigem Zug; diese Größe steht hiernach im allerengsten Zusammenhang mit dem

für die allgemeinen Elasticitätsmoduln s_{hk} characteristischen Bitensorsystem.

Wenn also mitunter aus dem practischen Grund der leichten Bestimmbarkeit des Moduls s_ι sein Verlauf mit der Richtung zur Characterisirung der Elasticitätsverhältnisse eines Krystalles benutzt wird, so läßt sich ein solches Verfahren nach dem Vorstehenden auch mit theoretischen Gründen stützen. Es ist aber nicht zu vergessen — was ich wiederholt betont habe —, daß das Bitensorsystem, resp. der Modul s_ι, allein zur erschöpfenden Darstellung der elastischen Verhältnisse eines Krystalles nicht ausreicht, daß man vielmehr noch ein Tensortripel, resp. einen Modul mit sechs Parametern heranzuziehen hat. Bezüglich des letzteren weichen die theoretischen und die practischen Anforderungen einigermaßen von einander ab; der von der Theorie empfohlene, mit den durch (62) bestimmten Componenten q'_{hk} hat keine einfache physikalische Bedeutung, die von mir an einem anderen Orte angegebenen[1]) leicht beobachtbaren Größen sind theoretisch complicirter.

b) Für die Behandlung des zweiten Falles ($a_{hh} = 0$, $a_{hk} = -a_{kh}$) wollen wir eine neue Bezeichnung der Parameter einführen und den Ansatz (47) schreiben

$$
\text{56)}\quad \begin{aligned}
S = P_{11}(& \qquad\quad -b_{21}T_{22} + b_{13}T_{33} + \cdots + b_{16}T_{12}) \\
& + P_{22}(+b_{21}T_{11} \qquad\quad -b_{32}T_{33} + \cdots + b_{26}T_{12}) \\
& + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + P_{12}(-b_{16}T_{11} - b_{26}T_{22} - b_{36}T_{33} - \cdots \qquad),
\end{aligned}
$$

oder anders angeordnet

$$
\text{66)}\quad \begin{aligned}
S = {} & b_{32}(P_{33}T_{22} - T_{33}P_{22}) + \cdots + b_{14}(P_{11}T_{23} - T_{11}P_{23}) + \cdots \\
& + b_{15}(P_{11}T_{31} - T_{11}P_{31}) + \cdots + b_{16}(P_{11}T_{12} - T_{11}P_{12}) + \cdots \\
& + b_{56}(P_{31}T_{12} - T_{31}P_{12}) + \cdots,
\end{aligned}
$$

wobei jedes einzelne Glied zwei weitere daraus durch cyclische Vertauschung der Indices zu gewinnende repräsentirt. Den letzteren Ausdruck kürzen wir passend noch ab in

$$
\text{67)}\quad \begin{aligned}
S = b_{32}B_{32} + \cdots + b_{14}B_{14} + \cdots + b_{15}B_{15} + \cdots + b_{16}B_{16} + \cdots \\
+ b_{56}B_{56} + \cdots
\end{aligned}
$$

wobei die Bezeichnungen B_{hk} an die Stellung der einzelnen Glieder in dem Schema (65) anknüpfen und durch Vergleichung von (67) mit (66) ohne Weiteres verständlich werden.

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 63, p. 381, 1897.

Dann stellen die

$$
\begin{gathered}
B_{56} = H_{111}, \quad B_{64} = H_{222}, \quad B_{45} = H_{333}, \\
(rB_{35} - rB_{25} - B_{64})/s = H_{112}, \quad (rB_{36} - rB_{26} - B_{45})/s = H_{113}, \\
(rB_{16} - rB_{36} - B_{45})/s = H_{223}, \quad (rB_{14} - rB_{34} - B_{56})/s = H_{221}, \\
(rB_{24} - rB_{14} - B_{56})/s = H_{311}, \quad (rB_{25} - rB_{15} - B_{64})/s = H_{332} \\
(B_{32} + B_{13} + B_{21})\, r/s = H_{123}
\end{gathered} \tag{68}
$$

die orthogonalen Componenten eines Trivectorsystemes dar. Dagegen geben

$$
\begin{gathered}
B_{21} - B_{13} = R_{11}, \quad B_{32} - B_{21} = R_{22}, \quad B_{13} - B_{32} = R_{33}, \\
B_{14} + B_{24} + B_{34} = R_{23}, \quad B_{25} + B_{35} + B_{15} = R_{31}', \\
B_{36} + B_{16} + B_{26} = R_{12}
\end{gathered} \tag{69}
$$

die orthogonalen Componenten eines Tensortripels, welches die specielle Eigenschaft hat, daß gilt:

$$
R_{11} + R_{22} + R_{33} = 0. \tag{70}
$$

Hiernach gestattet der Ansatz (65) resp. (67) die folgende Zerlegung:

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{r} \Big[& (rb_{56} + b_{24} - b_{34})\, H_{111} + (rb_{64} + (b_{35} - b_{15}) H_{222} \\
& + (rb_{45} + b_{16} - b_{26})\, H_{333} \\
& + \frac{1}{s} \big((2b_{35} - b_{15} - b_{25})\, H_{112} - (2b_{26} - b_{36} - b_{16})\, H_{113} \\
& + (2b_{16} - b_{26} - b_{36})\, H_{223} - (2b_{34} - b_{14} - b_{24})\, H_{221} \\
& + (2b_{24} - b_{34} - b_{14})\, H_{331} - (2b_{15} - b_{25} - b_{35})\, H_{332} \big) \\
& + \frac{1}{s} (b_{32} + b_{13} + b_{21})\, H_{123} \Big] \\
& + \frac{1}{s} \big[(b_{21} - b_{13})\, R_{11} + (b_{32} - b_{21})\, R_{22} + (b_{13} - b_{32})\, R_{33} \\
& + (b_{14} + b_{24} + b_{34})\, R_{23} + (b_{25} + b_{35} + b_{15})\, R_{31} + (b_{36} + b_{16} + b_{26})\, R_{12} \big].
\end{aligned} \tag{71}
$$

Dies zeigt, daß die 15 Parameter b_{hk} des Ansatzes (65) zurückführbar sind auf ein Trivectorsystem und ein Tensortripel. Ihre orthogonalen Componenten haben die folgenden Werthe:

$$h_{111} = b_{56} + (b_{24} - b_{34}) / r, \ldots$$

$$h_{112} = (2b_{35} - b_{15} - b_{25}) / rs, \quad h_{113} = -(2b_{26} - b_{36} - b_{16}) / rs,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

72) $$h_{123} = (b_{32} + b_{13} + b_{21}) / rs;$$

$$r_{11} = \tfrac{1}{3}(b_{21} - b_{13}), \quad r_{22} = \tfrac{1}{3}(b_{32} - b_{21}), \quad r_{33} = \tfrac{1}{3}(b_{13} - b_{32}),$$

$$r_{23} = \tfrac{1}{3}(b_{14} + b_{24} + b_{34}), \quad r_{31} = \tfrac{1}{3}(b_{25} + b_{35} + b_{15}),$$

$$r_{12} = \tfrac{1}{3}(b_{36} + b_{16} + b_{26}).$$

Wiederum gilt zwischen den drei Tensorcomponenten erster Art die Beziehung

73) $$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 0,$$

wodurch die Anzahl der unabhängigen Componenten derjenigen der Parameter b_{hk} gleich wird.

Eine directe physikalische Deutung des Bivectorsystemes und des Tensortripels scheint in diesem Falle Schwierigkeiten zu bieten. —

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Fall des Ansatzes (47) zurück, der, wie s. Z. gesagt, durch Superposition der unter a) und b) behandelten speciellen Fälle hergestellt werden kann, so ergiebt sich das Resultat, daß die 36 Parameter der allgemeinsten in zwei mal sechs Tensorcomponenten bilinearen Function sich zurückführen lassen auf ein Bitensorsystem, ein Trivectorsystem und zwei Tensortripel, von denen das eine dadurch beschränkt ist, daß seine drei Componenten erster Art die Summe Null liefern.

Diese complicirten Verhältnisse finden wahrscheinlich bei den Vorgängen der innern Reibung statt. —

Hiermit sind die fundamentalen Beziehungen der Krystallphysik im Wesentlichen erschöpft, denn die Fälle, wo es sich um scalare Functionen von anderer Natur handelt, als oben besprochen, sind selten und theils mit Hülfe der auseinandergesetzten Principien auf die obigen zurückführbar, theils weniger wichtig.

Ein Beispiel der ersteren Art giebt die Energie eines in einem electrostatischen Felde befindlichen und von Lichtschwingungen durchsetzten Körpers, die lineär in einem, quadratisch in einem andern Systeme von Vectorcomponenten ist. Ein Beispiel der letzteren Art ist die Energie eines ferromagnetischen Krystalles. Wir dürfen von dergleichen hier absehen.

Resultate.

Ausgehend von der Bemerkung, daß die gewöhnlichen Vectorcomponenten sich wie Coordinaten, die Componenten von Tensortripeln wie Quadrate und Producte von Coordinaten transformiren, sind als orthogonale Componenten eines Systemes gerichteter Größen $n$ter Ordnung allgemein $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Functionen bezeichnet, die sich transformiren, wie die durch geeignete Zahlenfactoren orthogonal gemachten Producte der Coordinaten zu je n, deren Anzahl gleichfalls

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

beträgt. Die Vectoren erscheinen hierbei als gerichtete Größen erster, die Tensoren als solche zweiter Ordnung.

Die Parameter der Krystallphysik sind, mit Ausnahme einiger unwesentlicher Fälle, sämmtlich zurückführbar auf gerichtete Größen erster bis vierter Ordnung, und zwar erfordert das einzelne Erscheinungsgebiet häufig mehr als eine Gattung. Die betreffenden Größen gestatten in vielen Fällen eine directe physikalische Deutung.

Göttingen, im December 1900.

Bemerkung. Durch einen nachträglichen Wechsel in der Bezeichnung ist im ersten Theil der vorstehenden Arbeit eine kleine Inconsequenz entstanden, die zu spät bemerkt worden ist, um berichtigt werden zu können. Der Festsetzung auf S. 357 würde entsprechen, daß S. 366—368 das Symbol r_{hik} mit h_{hik} vertauscht wird.

Zugleich sei bemerkt, daß S. 362 Z. 13 und 24 v. o. fälschlich p_{hk} an Stelle von n_{hk} und in der zweiten Zeile der Formel (36) auf S. 367 $(e_{14}+e_{25}+e_{36})$ an Stelle von h_{123} steht.

Ueber Primformen auf Riemann'schen Flächen.

Von

J. Wellstein in Straßburg i/E.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Dezember 1900 von F. Klein.

In seiner Untersuchung über „die Ritter'sche Primform auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche[1])" ist es Herrn Fricke gelungen, die Multiplikatoren der Ritter'schen Primform $P(o|e)$ in eine Gestalt zu bringen, die mir in besonderem Maße bemerkenswert scheint: Sie gestattet, die Ritter'sche Arbeit über „die multiplikativen Formen auf algebraischen Gebilden beliebigen Geschlechts etc." [2]) wesentlich durchsichtiger darzustellen und läßt überall ihre Beziehungen zum Abel'schen Theorem und zum Jakobi'schen Umkehrproblem klar erkennen, wie denn überhaupt das Abel'sche Theorem nebst seiner Umkehrung mittels der von Fricke vereinfachten Form $P(o|e)$ in kaum zu überbietender Einfachheit bewiesen werden kann. Für Fricke dient, wie für Ritter, die Klein'sche[3]) Primform $\Omega(o|e)$ als Durchgangspunkt. Da aber das Klein'sche Ω durch die Form $P(o|e)$ vollkommen entbehrlich gemacht wird, so scheint es wünschenswert, die Klein'sche Primform auch bei der Ableitung der Ritter'schen gänzlich auszuschalten.

Eine solche independente Darstellung von $P(o|e)$ gedenke ich in dieser Arbeit zu geben.

---

1) Nachrichten der Gött. Ges. d. Wiss. 1900.

2) Math. Ann. 44.

3) Math. Ann. 36.

I.

Darstellung der Primform durch Integrale III. Gattung.

Auf der n-blätterigen Fläche T führen wir durch Spaltung von x in $x = \frac{x_1}{x_2}$ binäre homogene Veränderliche x_1, x_2 ein; $\Pi(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}, \mathfrak{r})$ sei als Funktion des veränderlichen Ortes $\mathfrak{o}$ ein (Riemann'sches) Integral 3. Gattung mit folgenden Singularitäten:

$$\text{in } \mathfrak{p}\colon\quad \Pi(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) = \quad ln(xy) + f\cdot \text{cont.}$$
$$\text{in } \mathfrak{r}\colon\quad \Pi(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) = -ln(xt) + f\cdot \text{cont.},$$

wo y_1, y_2 und t_1, t_2 die Werte von x_1, x_2 in $\mathfrak{p}$, bezw. in $\mathfrak{r}$ seien. Zu dem Werte $x_1 : x_2 = z_1 : z_2$ gehören n konjugierte Punkte der Riemann'schen Fläche, die wir mit $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ bezeichnen und als von einander verschieden voraussetzen wollen. Auch $\mathfrak{p}$ sei kein Verzweigungspunkt. Dann ist

$$1)\qquad R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = \Pi(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Pi(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{q}_\nu, \mathfrak{r})$$

ein Integral der Klasse, das nur in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ unendlich wird, während die Singularitäten in $\mathfrak{r}$ sich herausheben. Da

$$\text{in } \mathfrak{p}\colon\qquad R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = ln(xy) + f\cdot \text{cont.}$$
$$\text{in } \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\colon R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = -\frac{1}{n} ln(xz) + f\cdot \text{cont.}$$

ist, so ist

$$\text{in } \mathfrak{p}\colon\qquad e^{R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})} = \quad (xy)\, e^{f\cdot \text{cont.}},$$
$$\text{in } \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\colon e^{R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})} = \frac{1}{\sqrt[n]{(xz)}}\, e^{f\cdot \text{cont.}},$$

eine Funktion, die neben dem einen Nullpunkt erster Ordnung in $\mathfrak{p}$ keine Nullstelle hat und nur in $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ wie $\frac{1}{\sqrt[n]{(xz)}}$ unendlich wird. Kompensiert man also diese Unstetigkeit durch den Faktor $\sqrt[n]{(xz)}$, so ist

$$2)\qquad P_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\; e^{R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})}$$

eine Primform, die nirgends unendlich und nur in $\mathfrak{p}$ null wird, und zwar wie (xy). Diese Primform ist noch von Hülfspunkten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$ abhängig, die man mit den zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Punkten zusammenfallen lassen könnte; der kompensierende Faktor $\sqrt[n]{(xz)}$ ginge dann in $\sqrt[n]{(xy)}$ über. Doch ziehen wir

es zunächst vor, die Punkte $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ zur Verfügung zu halten; sie sollen aber für alle Lagen des Punktes $\mathfrak{p}$ die nämlichen sein. Stellt man alsdann eine algebraische Funktion τ der Klasse mittels derartiger, von demselben z abhängiger Primformen dar, so hebt sich der Faktor $\sqrt[n]{(xz)}$ von selbst heraus, und die Darstellung stützt sich dann nur auf Exponentialgrößen der Integrale 3. Gattung.

Es erübrigt noch $P_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ in T' eindeutig zu machen. Um das zunächst für $R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ zu erreichen, führen wir von einem Punkte ω aus einen Querschnitt $l_\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{p}$, und die Schnitte $l_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, l_{\mathfrak{q}_n}$ nach $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$. Die Schnittränder von $l_\mathfrak{p}$ versehen wir mit den Marken + und − in der Weise, das eine positive Umkreisung des Punktes $\mathfrak{p}$ von dem (−)rande des Schnittes $l_\mathfrak{p}$ zum (+)rande führt; ähnlich bei $l_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, l_{\mathfrak{q}_n}$. Dann ist:

3) $$\begin{aligned} &\text{an } l_\mathfrak{p}: \quad R_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) - R_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) = 2\pi i \\ &\text{an } l_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, l_{\mathfrak{q}_n}: \quad = -\frac{2\pi i}{n}. \end{aligned}$$

Soll also $P_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\, e^{R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})}$ auch an den Schnitten $l_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, l_{\mathfrak{q}_n}$ keinen Faktor ausscheiden, so muß man $\sqrt[n]{(xz)} = e^{\frac{1}{n}\int\frac{(dx,z)}{(xz)}}$ in der Weise eindeutig machen, daß diese Form auch den Faktor $e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ kompensiert. Dann ist

$$\text{an } l_\mathfrak{p}, l_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, l_{\mathfrak{q}_n}: P_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) = P_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}).$$

Damit P auch an den Querschnitten $a_1, \ldots, a_p$; $b_1, \ldots, b_p$ ein möglichst einfaches Verhalten zeigt, gehen wir zu Normalintegralen über. Sei, wie üblich,

$$\text{an } a_\nu: \quad \Pi(\overset{+}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) - \Pi(\overset{-}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, p,$$

so ist

$$\text{an } b_\nu: \quad \Pi(\overset{+}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) - \Pi(\overset{-}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}, \mathfrak{r}) = 2\pi i(u_\nu(\mathfrak{p}) - u_\nu(\mathfrak{r}))$$

wo $u_1(\mathfrak{o}), u_2(\mathfrak{o}), \ldots, u_p(\mathfrak{o})$ die an den Querschnitten $a_1, \ldots, a_p$ auf das Periodenschema $|\delta_{\mu\nu}|$ normierten Integrale 1. Gattung sind[1]). Bezeichnet man die mit Normalintegralen 3. Gattung gebildete Größe $R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$, die entsprechende Primform mit $\mathfrak{P}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$, so ist:

---

1) $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \mu = \nu \\ 0 \text{ für } \mu \gtrless \nu. \end{cases}$

$$4)\quad \begin{aligned} &\text{an } a_\mu:\quad \mathfrak{R}_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = 0 \\ &\text{an } b_\mu:\quad \mathfrak{R}_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = 2\pi i\,(u_\mu(\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum_\nu u_\mu(\mathfrak{q}_\nu)), \end{aligned}$$

also:

$$5)\quad \begin{aligned} &\text{an } a_\mu:\quad \mathfrak{P}_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) \\ &\text{an } b_\mu:\quad \mathfrak{P}_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p})\cdot e^{2\pi i\left(u_\mu(\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} u_\mu(\mathfrak{q}_\nu)\right)} \end{aligned}$$

genau wie bei der Fricke'schen Form. An den Schnitten $l_\mathfrak{p}$ und $l_{\mathfrak{q}_1}, \ldots, l_{\mathfrak{q}_n}$ scheidet auch $\mathfrak{P}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ keine Faktoren aus.

So stimmt also die Form $\mathfrak{P}_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ in allen wesentlichen Eigenschaften mit der Ritter'schen Form überein und vermag sie daher vollkommen zu ersetzen.

II.

Darstellung der Primform durch das Integral R.

Offenbar ist $R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) - R_z(\mathfrak{o}\,|\,\pi)$ ein Integral 3. Gattung vom Typus $\Pi(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}, \pi)$. Da sich somit das gewöhnliche Integral 3. Gattung einfacher durch Integrale R, als R durch jene ausdrücken läßt, und, wie wir sahen, $e^{R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})}$ durch den Zusatzfaktor $\sqrt[n]{(xz)}$ zur Primform wird, so scheint es zweckmäßig, $R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ als primäres Integral 3. Gattung einzuführen und die gewöhnlichen Integrale 3. Gattung als daraus abgeleitete zu betrachten. Dann erwächst uns aber die Aufgabe, für R eine direkte, nicht auf Integrale 3. G. gestützte Herleitung zu geben. Im Falle

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n = \infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_n,$$

wo $R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ in das Christoffel'sche Integral $R(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ übergeht, existirt eine (nicht homogene) Darstellung auf einfach verzweigten Riemann'schen Flächen mit beliebigen sonstigen Singularitäten der Grundgleichung [1]). Eine ganz allgemein giltige Darstellung von $R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ ohne jede Voraussetzung über die Beschaffenheit der irreduzibelen Grundgleichung gab Verfasser dieses Aufsatzes in einer Vorlesung über algebraische Funktionen (1899, S.-S.). Zur Ableitung dienten arithmetische Begriffe und Sätze, die hier kurz zusammengestellt werden sollen.

---

1) Annali di Matematica IIª, 97—99.

Unter ganzen algebraischen Formen verstehen wir solche, die nirgends ∞ werden[1]). Es ist stets möglich, n ganze Formen

$$\varepsilon_1(\mathfrak{o}),\ \varepsilon_2(\mathfrak{o}),\ \ldots,\ \varepsilon_n(\mathfrak{o})$$

so zu bestimmen, daß alle ganzen Formen sich durch die „Minimalbasis" $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ linear, homogen und mit Coefficienten darstellen lassen, die rationale ganze Formen von x_1, x_2 sind. Die Formen dieser Minimalbasis denken wir uns so numerirt, daß sie nach wachsender Dimension $[\varepsilon_i]$ geordnet sind. Da auch die Zahl 1 zu den ganzen Formen gehört, so muß ε_1 von der Dimension null, also eine Konstante sein, die wir gleich 1 annehmen dürfen.

Zu der Basis

$$\varepsilon_1(\mathfrak{o}),\ \varepsilon_2(\mathfrak{o}),\ \ldots,\ \varepsilon_n(\mathfrak{o})$$

definieren wir eine „komplementäre"[2]) Basis

$$\bar{\varepsilon}_1(\mathfrak{o}),\ \bar{\varepsilon}_2(\mathfrak{o}),\ \ldots,\ \bar{\varepsilon}_n(\mathfrak{o})$$

durch die Gleichungen:

1) $$S\, \varepsilon_h \bar{\varepsilon}_k = \delta_{hk}; \qquad h, k = 1, 2, \ldots, n,$$

wo S das Zeichen für die Spur und δ_{hk} das bekannte Kronecker'sche Symbol ist. Ist $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_n$ ein System „konjugierter", d. h. kongruent über einander liegender Punkte der Riemann'schen Fläche, so ist nach (1):

2) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varepsilon_h(\mathfrak{o}_\nu)\, \bar{\varepsilon}_k(\mathfrak{o}_\nu) = \delta_{hk},$$

woraus sofort

3) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varepsilon_\nu(\mathfrak{o}_h)\, \bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{o}_k) = \delta_{hk}$$

folgt, also, wenn man über h von 1 bis n summiert und

$$\sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_\nu(\mathfrak{o}_h) = S\, \varepsilon_\nu(\mathfrak{o}) = e_\nu(x_1 x_2)$$

schreibt,

4) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} e^\nu(x_1 x_2)\, \bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{o}_k) = 1.$$

Hier ist $e_\nu(x_1 x_2)$ eine rationale, ganze Form. Nach dieser Vorbereitung wollen wir den Ausdruck für $R_s(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ angeben und dann verifizieren. Die systematische Ableitung würde zu sehr aufhalten.

---

1) Vergl. Ritter, a. a. O. § 9.

2) Vergl. Dedekind und Weber, Th. der alg. Functionen einer Ver. J. f. Math. 92, § 10.

Es ist

$$5)\quad R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \int r_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) \frac{(yz)(xdx)}{(yx)(xz)} = \int r_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) \left(\frac{(ydx)}{(yx)} - \frac{(zdx)}{(zx)}\right),$$

wo

$$6)\quad r_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \varepsilon_1(\mathfrak{p})\bar{\varepsilon}_1(\mathfrak{o}) + \sum_{\nu=2}^{n}\left\{\varepsilon_\nu(\mathfrak{p})\left(\frac{(xz)}{(yz)}\right)^{[\varepsilon_\nu]} + \frac{1}{n}e_\nu(z)\left(\frac{(yx)}{(yz)}\right)^{[\varepsilon_\nu]}\right\}\bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{o}).$$

Die Endlichkeit von R in den Verzweigungspunkten ist durch die Basis $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$ unmittelbar gesichert. Wir haben daher das Verhalten von R nur noch in den Punkten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n, \text{ wo } (xy) = 0$$
$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n, \text{ wo } (xz) = 0$$

wird, zu prüfen; $\mathfrak{p}$ ist einer der Punkte $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, sagen wir etwa $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Dann ist wegen 3) und 4):

$$r_z(\mathfrak{p}_\nu|\mathfrak{p}) = \varepsilon_1\cdot\bar{\varepsilon}_1(\mathfrak{p}_\nu) + \sum_{\nu=2}^{n}\varepsilon_\nu(\mathfrak{p})\bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{p}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(\mathfrak{p})\bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{p}_\nu) = \delta_{\nu 1}$$

$$r_z(\mathfrak{q}_\nu|\mathfrak{p}) = \varepsilon_1\cdot\bar{\varepsilon}_1(\mathfrak{q}_\nu) + \sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{n}e_\nu(z)\bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{q}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n}e_\nu(z)\bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{q}_\nu)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

indem $\varepsilon_1 = 1$ und $[\varepsilon_2] \geqq 1$ ist.

Daher ist:

$$\text{in } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1: \quad R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = ln(xy) + f\cdot\text{cont},$$
$$\text{in } \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n: \quad R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = -\frac{1}{n}ln(xz) + f\cdot\text{cont},$$

während in $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n$ keine Unstetigkeit eintritt. Folglich hat $R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ in der That die verlangten Eigenschaften, und es ist leicht zu übersehen, wie sich diese abändern, wenn $\mathfrak{p}$, entgegengesetzt der bisherigen Annahme, in einen Verzweigungspunkt $\mathfrak{v}$ rückt; $\mathfrak{P}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{v})$ wird auch in einem solchen zur ersten Ordnung null, bleibt also eine Primform.

III.

Die Periodicitätsmoduln von R.

Wie bereits bemerkt, ist $R_\infty(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ das Christoffel'sche Integral 3. Gattung, dessen merkwürdige Eigenschaften in der sehr lesenswerten Dissertation von Pauls[1]) eingehend untersucht worden sind. Diese übertragen sich ohne Weiteres auf das projektiv all-

1) Ueber die Beziehung des Riemann'schen Integrals 2. Gattung zu den Periodicitätsmoduln der Function $R(\mathfrak{o}|\varepsilon)$. Diss. Straßburg 1882.

gemeinere $R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$. Wir wollen uns hier nur, einer Anwendung wegen, mit den Periodizitätsmoduln befassen, die als Funktionen des Ortes $\mathfrak{p}$ und des Parameters $z = \frac{z_1}{z_2}$ folgendermaßen bezeichnet werden sollen:

$$\text{an } a_\nu: \quad R_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) - R_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) = \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{p})_z,$$
$$\text{an } b_\nu: \quad R_z(\overset{+}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) - R_z(\overset{-}{\mathfrak{o}}|\mathfrak{p}) = \mathfrak{B}_\nu(\mathfrak{p})_z.$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Dann ist:

$$1) \qquad \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{p})_z = \int_{(b_\nu)} d_0 R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}), \quad \mathfrak{B}_\nu(\mathfrak{p})_z = \int_{(a_\nu)} d_0 R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$$

wo das Differential sich auf Aenderung von $\mathfrak{o}$ bezieht und der Weg a_ν (bezw. b_ν) in der Richtung zu durchlaufen ist, die vom Minusrande des Weges b_ν (bezw. a_ν) auf den Plusrand führt. Die Integrale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind besondere Fälle des Integrals

$$2) \qquad \mathfrak{C}(\mathfrak{p})_z = \int_{(\lambda)} d_0 R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}),$$

das in bestimmt vorgeschriebener Richtung über einen beliebigen geschlossenen Weg λ in T zu nehmen ist. Der Weg λ werde links der Integrationsrichtung mit der Marke (+), rechts mit der Marke (–) versehen. Damit $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})_z$ nicht divergiere, muß $\mathfrak{p}$ außerhalb des Weges liegen. Unter dieser Voraussetzung ist das Integral $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})_z$ eindeutig bestimmt, und wir wollen nun sein Verhalten an den beiden Seiten von λ untersuchen. Nach Pauls', l. c. Seite 24, nehmen wir zu diesem Zwecke $\mathfrak{p}$

1) auf der Seite $+\lambda$,
2) auf der Seite $-\lambda$

unmittelbar gegenüber der ersten Lage an. Indem wir nun in beiden Fällen den Weg λ in der Nähe von $\mathfrak{p}$ mit erlaubter Deformation halbkreisförmig um $\mathfrak{p}$ herumbiegen, einmal nach der einen Seite, im anderen Falle nach der anderen, wird $\mathfrak{C}(\overset{+}{\mathfrak{p}})_z - \mathfrak{C}(\overset{-}{\mathfrak{p}})_z$ genau gleich dem Integral um $\mathfrak{p}$ in positiver Richtung. Dieses ist aber $2\pi i$, und so folgt:

$$\text{an } \lambda: \quad \mathfrak{C}(\overset{+}{\mathfrak{p}})_z - \mathfrak{C}(\overset{-}{\mathfrak{p}})_z = 2\pi i.$$

Ebenso ist

$$\text{an } \lambda: \quad \mathfrak{C}(\mathfrak{p})_z^+ - \mathfrak{C}(\mathfrak{p})_z^- = -\frac{2\pi i}{n},$$

wovon wir aber keinen Gebrauch machen wollen[1]).

Für $\lambda = a_\nu$ ist obige Vorschrift der Randbezeichnung erfüllt, für $\lambda = b_\nu$ dagegen nur bei Aenderung der Wegrichtung. Daher ist:

$$\text{an } a_\nu: \quad \mathfrak{B}_\nu(\overset{+}{\mathfrak{p}})_z - \mathfrak{B}_\nu(\overset{-}{\mathfrak{p}})_z = 2\pi i,$$
$$\text{an } b_\nu: \quad \mathfrak{A}_\nu(\overset{+}{\mathfrak{p}}_\nu) - \mathfrak{A}_\nu(\overset{-}{\mathfrak{p}})_z = 2\pi i,$$

und andere Periodizitätsmoduln treten (bei variabelem $\mathfrak{p}$) nicht auf.

Mithin sind $\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{p})_z$, $\mathfrak{B}_\nu(\mathfrak{p})_z$, in ihrer Abhängigkeit von $\mathfrak{p}$ betrachtet, Integrale der Klasse mit den denkbar einfachsten Periodizitätsmoduln:

3)

	an a_ν	an b_ν
$\mathfrak{A}_\mu(\overset{+}{\mathfrak{o}})_z - \mathfrak{A}_\mu(\overset{-}{\mathfrak{o}})_z =$	0	$-2\pi i \cdot \delta_{\mu\nu}$
$\mathfrak{B}_\mu(\overset{+}{\mathfrak{o}})_z - \mathfrak{B}_\mu(\overset{-}{\mathfrak{o}})_z =$	$2\pi i \cdot \delta_{\mu\nu}$	0

$$\mu,\nu = 1, 2, \ldots, p; \; \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \mu = \nu \\ 0 \text{ für } \mu \gtrless \nu \end{cases}$$

woraus sich die lineare Unabhängigkeit dieser $2p$ Integrale sowie die Thatsache ergiebt, daß

$$e^{\mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_z}, \quad e^{\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_z}$$

wie die Fläche T verzweigte (aber transscendente) Funktionen sind. Die Integrale $\mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_z$, $\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_z$ werden nur in $x_1 : x_2 = z_1 : z_2$, also in $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ unendlich, aber zu endlicher Ordnung[2]), es sind also Integrale 2. Gattung im weiteren Sinne.

Während die Integrale $R_z(\mathfrak{o} \mid \mathfrak{p})$ zur Darstellung der logarithmischen Unstetigkeiten aller Integrale der Klasse ausreichen, können die von logarithmischen Unstetigkeiten freien Integrale $J(\mathfrak{o})$ mittelst $\mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_z$, $\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_z$ auf algebraische Bestandteile reduziert werden. Hat nämlich $J(\mathfrak{o})$ die Periodizitätsmoduln

1) Da bei Pauls der Spezialfall $z = \infty$ vorliegt, so fehlt dort die letztere Formel.

2) Vergl. Pauls, l. c. Noch vollständiger beherrscht man diese Integrale $\mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_z$, $\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_z$, wenn man sie in Beziehung setzt zu den $2p$ Integralen 1. und 2. Gattung, deren Reihenentwicklungen in $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ nur je eine jener null bezw. unendlich werdender Glieder enthalten, die nach dem Lückensatze den algebraischen Funktionen versagt sind.

	an a_ν	an b_ν
$J(\overset{+}{\mathfrak{o}}) - J(\overset{-}{\mathfrak{o}}) =$	A_ν	B_ν ,

so ist offenbar

4) $$\varphi(\mathfrak{o}) = J(\mathfrak{o}) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \begin{vmatrix} A_\mu & \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_{z'} \\ B_\mu & \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_{z'} \end{vmatrix}$$

eine von Periodizitätsmoduln und Unstetigkeiten unendlich hoher Ordnung freie, also wie T verzweigte algebraische Function; mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung ist der Parameter $z_1 : z_2$ durch $z_1' : z_2'$ ersetzt worden, die zugehörigen Punkte von T seien $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_n'$.

Sind $u_1(\mathfrak{o}), \ldots, u_p(\mathfrak{o})$ die Normalintegrale erster Gattung, und ist

5)

	an a_ν	an b_ν
$u_\mu(\overset{+}{\mathfrak{o}}) - u_\mu(\overset{-}{\mathfrak{o}}) =$	$\delta_{\mu\nu}$	$a_{\mu\nu}$,

so ist zufolge obigem Satze:

$$\varphi_\nu(\mathfrak{o}) = u_\nu(\mathfrak{o}) - \frac{1}{2\pi i} \sum_\mu \begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} & \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_{z'} \\ a_{\mu\nu} & \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_{z'} \end{vmatrix}$$
$$= u_\nu(\mathfrak{o}) - \frac{1}{2\pi i} \left\{ \mathfrak{B}_\nu(\mathfrak{o})_{z'} - \sum_\mu a_{\mu\nu} \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_{z'} \right\}$$

eine algebraische Funktion. Durch Ausführung des Integrals

$$\int_{(T')} u_\mu(\mathfrak{o})\, d_{\mathfrak{o}} R_{z'}(\mathfrak{o} \,|\, \mathfrak{p})$$

um den Rand der einfach zusammenhängenden Fläche T' findet man leicht:

$$\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{p})_{z'} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} a_{\mu\lambda} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_{z'} = 2\pi i \left(u_\mu(\mathfrak{p}) - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\mu(\mathfrak{q}_\nu') \right)$$

oder

6) $$2\pi i \left(u_\mu(\mathfrak{o}) - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} u_\mu(\mathfrak{q}_\nu') \right) = \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_{z'} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} a_{\mu\lambda} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_{z'},$$

sodaß also jene algebraische Funktion sich als Konstante ausweist.

Die Normalintegrale 1. Gattung sind damit als lineare Verbindungen der Integrale $\mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})$, $\mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})$ dargestellt.

Um jetzt $R_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ zu normieren, suchen wir die Konstanten $c_1, \ldots, c_p$ so zu bestimmen, daß

$$\mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = R_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} c_\lambda u_\lambda(\mathfrak{o})$$

an $a_1, \ldots, a_p$ keine Periodizitätsmoduln hat. An a_ν ist aber

$$\mathfrak{R}_s(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_s(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{p})_s - c_\nu,$$

also muß

$$c_\nu = \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{p})_s,$$

und

7) $$\mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = R_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_s u_\lambda(\mathfrak{o})$$

sein.

Zum Abschluß der independenten Darstellung von $\mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ fehlt jetzt nur noch der Nachweis, daß dieses Integral auch an $b_1, \ldots, b_p$ die in I, (4) berechneten Periodizitätsmoduln hat. Nun ist nach (7)

$$\text{an } b_\mu\colon\quad \mathfrak{R}_s(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_s(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{p})_s - \sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_s,$$

also nach (6)

$$\text{an } b_\mu\colon\quad \mathfrak{R}_s(\overset{+}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_s(\overset{-}{\mathfrak{o}}\,|\,\mathfrak{p}) = 2\pi i \Big(u_\mu(\mathfrak{p}) - \frac{1}{n} \sum_\nu u_\mu(\mathfrak{q}_\nu)\Big),$$

übereinstimmend mit I, (4).

Es liegt nahe, die Formel (4) auf $J(\mathfrak{o}) = R_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ oder $J(\mathfrak{o}) = \mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ anzuwenden und mit dem so modifizierten R bezw. $\mathfrak{R}$ die Primform zu bilden; sie lautet im einen Falle:

8) $$\pi_{s,s'}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\, e^{R_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) - \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{p})_s & \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_{s'} \\ \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{p})_s & \mathfrak{B}_\mu(\mathfrak{o})_{s'} \end{vmatrix}},$$

im anderen

9) $$\pi^*_{s,s'}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\, e^{\mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left\{ u_\mu(\mathfrak{p}) - \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} u_\mu(\mathfrak{q}_\nu) \right\} \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{o})_{s'}},$$

und man findet durch eine leichte Rechnung auf Grund der Formel (6):

10) $$\pi^*_{s,s'}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = \pi_{s,s'}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})\, e^{-\frac{1}{n} \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{p})_s u_\mu(\mathfrak{q}')_\nu}$$

sodaß π, π^* als Funktionen von $\mathfrak{o}$ sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Diese Form $\pi_{s,s'}(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ oder $\pi^*_{s,s'}(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ nun, in der übrigens $z_1 : z_2$ mit $z'_1 : z'_2$ zusammenfallen darf, hat die charakteristischen Eigenschaften der Weierstraß'schen Primfunktion, d. h. sie wird in $\mathfrak{p}$ zur ersten Ordnung null und sonst nirgends, ist verzweigt wie eine algebraische Funktion der Klasse, hat dafür aber eine wesentlich singuläre Stelle in $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_n$.

IV.

Das Vertauschungsgesetz der Primform P.

Während die Klein'sche Primform $\Omega(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ bei Vertauschung des „Parameters" $\mathfrak{p}$ mit dem „Argumente" $\mathfrak{o}$ das Vorzeichen ändert[1], ist das Verhalten von $P_s(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ im gleichen Falle nicht so einfach. Nach unserer Darstellungsweise kommt es zur Aufklärung dieser Frage auf den Vergleich von $R_s(\mathfrak{p}|\mathfrak{o})$ mit $R_s(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ an, eine Aufgabe, die für $R_\infty(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ noch nicht gelöst ist, da das einzige verfügbare Hülfsmittel, die Bildung des Integrals

$$\int_{(T')} R_\infty(\mathfrak{p}|\mathfrak{o})\, d_{\mathfrak{o}} R_\infty(\mathfrak{p}'|\mathfrak{o}),$$

das ja $R_\infty(\mathfrak{p}|\mathfrak{p}') - R_\infty(\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}) +$ *andere Teile* liefern muß, in $\infty_1, \ldots, \infty_n$ versagt.

Dagegen läßt sich das Integral

$$\int_{(T'')} R_s(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})\, dR_{s'}(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}')$$

um die Fläche T'', in der $R_s(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ eindeutig ist, mit Leichtigkeit auswerten und liefert, indem man es einerseits als Residuensumme, andererseits mittels der Periodizitätsmoduln ausdrückt,

$$1)\qquad R_s(\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} R_s(\mathfrak{q}'_\nu|\mathfrak{p}) = R_{s'}(\mathfrak{p}|\mathfrak{p}') - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} R_{s'}(\mathfrak{q}_\nu|\mathfrak{p}') + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_s & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p}')_{s'} \\ \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_s & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p}')_{s'} \end{vmatrix},$$

oder, für $\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}$,

$$2)\qquad \begin{cases} R_s(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) - R_{s'}(\mathfrak{p}|\mathfrak{o}) = \dfrac{1}{n}\Delta_{s,s'} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_s & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_{s'} \\ \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_s & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_{s'} \end{vmatrix} \\ \Delta_{s,s'} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(R_s(\mathfrak{q}'_\nu|\mathfrak{p}) - R_{s'}(\mathfrak{q}_\nu|\mathfrak{o})\right), \end{cases}$$

---

1) Vergl. etwa Ritter, l. c., § 6.

und unsere Aufgabe wird die sein

$$\lim_{s'=s} \Delta_{s,s'}$$

zu bilden. Die Determinantensumme macht ja in dieser Hinsicht keine Schwierigkeiten.

Durch Beispiele aus dem Gebiete der binomischen Funktionen wird man darauf geführt, zu den Punkten $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n; \mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_n$ noch weitere, davon verschiedene Punkte $\mathfrak{q}''_1, \ldots, \mathfrak{q}''_n$ zu fügen, in denen die Linearform $(z''x)$ verschwindet, und das Integral

$$3)\qquad \int \frac{(zz'')(x\,dx)}{(zx)(xz'')} = \int \frac{(z''dx)}{(z''x)} - \int \frac{(z\,dx)}{(zx)} = \int d\,ln\,\frac{(z''x)}{(zx)}$$

mit $R_{s'}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ in Beziehung zu setzen. Um es zunächst eindeutig zu machen, fügen wir in T zu den kanonischen Querschnitten $a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_p$ noch $2n$ Schnitte, die von irgend einem Punkte ω nach $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n; \mathfrak{q}''_1, \ldots, \mathfrak{q}''_n$ laufen. Die Periodizitätsmoduln sind dann ganze Vielfache von $2\pi i$, die wir

$$4)\qquad \text{an } a_\nu \text{ mit } h_\nu^{(s,s'')}.2\pi i; \quad \text{an } b_\nu \text{ mit } k_\nu^{(s,s'')}.2\pi i$$

bezeichnen wollen.

Jetzt ist, um die so zerschnittene Fläche genommen,

$$\int ln\,\frac{(z''x)}{(zx)}\,d_0 R_{s'}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$$

einerseits gleich

$$ln\,\frac{(z''y)}{(zy)} - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} ln\,\frac{(z''z')}{(zz')} = ln\,\frac{(z''y)\,(zz')}{(zy)(z''z')},$$

andererseits gleich

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} R_{s'}(\mathfrak{q}''_\nu\,|\,\mathfrak{p}) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} R_{s'}(\mathfrak{q}_\nu\,|\,\mathfrak{p}) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \begin{vmatrix} h_\lambda^{(s,s'')}, & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_{s'} \\ k_\lambda^{(s,s'')}, & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_{s'} \end{vmatrix}$$

also für $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$:

$$\sum_\nu R_{s'}(\mathfrak{q}_\nu\,|\,\mathfrak{o}) = -ln\,\frac{(z''x)}{(zx)}\,\frac{(zz')}{(z''z')} + \sum_\nu R_{s'}(\mathfrak{q}''_\nu\,|\,\mathfrak{o}) + \sum_\lambda \begin{vmatrix} h_\lambda^{(s,s'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_{s'} \\ k_\lambda^{(s,s'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_{s'} \end{vmatrix}.$$

Ebenso ist:

$$\sum_\nu R_s(\mathfrak{q}'_\nu\,|\,\mathfrak{p}) = -ln\,\frac{(z''y)}{(z'y)}\,\frac{(z'z)}{(z''z)} + \sum_\nu R_s(\mathfrak{q}''_\nu\,|\,\mathfrak{p}) + \sum_\lambda \begin{vmatrix} h_\lambda^{(s',s'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_s \\ k_\lambda^{(s',s'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_s \end{vmatrix}.$$

Also

$$\Delta_{s,s'} = -ln\,\frac{(z''y)}{(z'y)}\,\frac{(z'z)}{(z''z)}\,\frac{(zx)}{(z''x)}\,\frac{(z''z')}{(zz')} + \sum_\nu R_s(\mathfrak{q}''_\nu\,|\,\mathfrak{p}) - \sum_\nu R_{s'}(\mathfrak{q}''_\nu\,|\,\mathfrak{o})$$
$$+ \sum_\lambda \begin{vmatrix} h_\lambda^{(s',s'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_s \\ k_\lambda^{(s',s'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_s \end{vmatrix} - \sum_\lambda \begin{vmatrix} h_\lambda^{(s,s'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_{s'} \\ k_\lambda^{(s,s'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_{s'} \end{vmatrix}.$$

Im Logarithmus hebt sich $(z'z)$ fort, und der Grenzübergang wird ausführbar; der Logarithmus geht über in

$$-\ln\left(-\frac{(z''y)}{(z''x)}\cdot\frac{(zx)}{(zy)}\right).$$

Nach (2) ist daher:

$$e^{R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})-R_z(\mathfrak{p}|\mathfrak{o})} = \sqrt[n]{-\frac{(z''x)}{(z''y)}\frac{(zy)}{(zx)}}\, e^{\frac{1}{n}\sum\limits_\nu R_z(\mathfrak{q}_\nu''|\mathfrak{p})-\frac{1}{n}\sum\limits_\nu R_z(\mathfrak{q}_\nu''|\mathfrak{o})}$$

$$\times e^{\frac{1}{n}\sum\limits_\lambda\begin{vmatrix} h_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z \\ k_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_z\end{vmatrix}-\frac{1}{n}\sum\limits_\lambda\begin{vmatrix} h_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_z \\ k_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_z\end{vmatrix}+\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_\lambda\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_z \\ \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_z & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_z\end{vmatrix}}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\sqrt[n]{(xz)}$ und verteilen alle Glieder symmetrisch in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$. Dann ergiebt sich:

5) $$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[n]{-(zx)(z''y)}\, e^{R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})-\frac{1}{n}\sum\limits_\nu R_z(\mathfrak{q}_\nu''|\mathfrak{p})-\frac{1}{n}\sum\limits_\lambda\begin{vmatrix} h_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z \\ k_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_z\end{vmatrix}-\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\,\mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o}} \\ \sqrt[n]{+(zy)(z''x)}\, e^{R_z(\mathfrak{p}|\mathfrak{o})-\frac{1}{n}\sum\limits_\nu R_z(\mathfrak{q}_\nu''|\mathfrak{o})-\frac{1}{n}\sum\limits_\lambda\begin{vmatrix} h_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_z \\ k_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_z\end{vmatrix}-\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_z\,\mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p}} \end{array}\right.$$

Fügt man im Exponenten beiderseits zum letzten Gliede noch die in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}$ symmetrische Summe

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_\lambda\sum_\nu a_{\nu\lambda}\,\mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\,\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{o})_z\,,$$

so entsteht links:

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\left(\mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_z-\sum_\nu a_{\nu\lambda}\,\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{o})_z\right),$$

oder nach III, (6):

$$-\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\left(u_\lambda(\mathfrak{o})-\frac{1}{n}\sum_\nu u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu)\right).$$

Rechts entsteht:

$$-\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_z\left(u_\lambda(\mathfrak{p})-\frac{1}{n}\sum_\nu u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu)\right).$$

Wir setzen jetzt, nach III, (7), an Stelle von

$$R_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$$

den Wert

$$\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})+\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\,u_\lambda(\mathfrak{o}).$$

Dann ist

$$R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum_\nu R_z(\mathfrak{q}_\nu''\,|\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum_\nu \mathfrak{R}_z(\mathfrak{q}_\nu''\,|\,\mathfrak{p}) + \sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\, u_\lambda(\mathfrak{o})$$
$$- \frac{1}{n}\sum_\nu\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z\, u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu''),$$

und die linke Seite von (5) wird:

6) $$P^*_{z,z''}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) =$$
$$\sqrt[n]{(xz)(z''y)}\cdot e^{\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum\limits_\nu \mathfrak{R}_z(\mathfrak{q}_\nu''|\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum\limits_\lambda \begin{vmatrix} h_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z \\ k_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{p})_z \end{vmatrix} + \frac{1}{n}\sum\limits_\nu\sum\limits_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z (u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu) - u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu''))},$$

während die rechte hieraus durch Vertauschnng von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ bis auf das Vorzeichen unter der Wurzel hervorgeht. Demnach ist:

7) $$P^*_{z,z''}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p} = \sqrt[n]{-1}\,.\,P_{z,z''}(\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{o})$$

und

8) $$P^*_{z,z''}(\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{o}) \doteq$$
$$\sqrt[n]{(yz)(z''x)}\,e^{\mathfrak{R}_z(\mathfrak{p}|\mathfrak{o}) - \frac{1}{n}\sum\limits_\nu \mathfrak{R}_z(\mathfrak{q}_\nu''|\mathfrak{o}) - \frac{1}{n}\sum\limits_\lambda \begin{vmatrix} h_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{p})_z \\ k_\lambda^{(z,z'')} & \mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{o})_z \end{vmatrix} + \frac{1}{n}\sum\limits_\nu\sum\limits_\lambda \mathfrak{A}_\lambda(\mathfrak{o})_z (u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu) - u_\lambda(\mathfrak{q}_\nu''))}.$$

I n d e n F o r m e l n 5) u n d 6), 7), 8) i s t d a s V e r t a u s c h u n g s g e s e t z f ü r $R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ i n a l l g e m e i n s t e r G e s t a l t a u s g e d r ü c k t.

Wählt man die Punkte $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n;\ \mathfrak{q}_1'', \ldots, \mathfrak{q}_n''$ so, daß sie von keinem der Querschnitte a, b scheinbar eingeschlossen werden, so sind die Zahlen h, k gleich Null und kommen zum Wegfall.

Nun unterscheidet sich aber die Form $P^*_{z,z''}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ von der (R i t t e r' schen) Primform

$$\mathfrak{P}_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\,e^{\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})}$$

nur durch Glieder, die von $\mathfrak{o}$ unabhängig sind, und so sieht man:

D i e i n (6) d e f i n i e r t e F o r m $P^*_{z,z''}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$ i s t e i n e P r i m f o r m v o m C h a r a k t e r d e r R i t t e r' s c h e n, u n d i h r V e r t a u s c h u n g s g e s e t z l a u t e t:

$$(P^*_{z,z''}(\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{o}))^n + (P^*_{z,z''}(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}))^n = 0.$$

In allen vorangegangenen Formeln stehen uns außer den Anfangspunkten und Integrationskonstanten der benutzten Integrale noch die Parameter $z_1 : z_2$ und $z_1'' : z_2''$ zur Verfügung. Ohne zwingenden Grund darüber zu bestimmen, möchten wir vermeiden.

Damit wollen wir diesen Teil der Untersuchnng abbrechen. Wir haben im Verlauf derselben aus dem einen Integrale $R_z(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})$

alle Gebilde hervorgehen sehen, die man auf Riemann'schen Flächen in Betracht zu ziehen pflegt. Man könnte die Ausdrücke für Primformen scheinbar noch wesentlich verallgemeinern, indem man an Stelle von (xz) in I, (1) und (2) irgend eine ganze, nicht notwendig rationale, Form νter Dimension $\varphi(\mathfrak{o})$ setzte. Ihre Nullpunkte seien

$$o_1, o_2, \ldots, o_{n\nu},$$

wobei jeder so oft zu zählen ist, als seine „Ordnung" beträgt. Dann ist

$$\pi_\varphi(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{\varphi(\mathfrak{o})}\, e^{\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) - \frac{1}{n\nu}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n\nu}\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|o_\lambda)}$$

eine Primform vom Typus

$$\mathfrak{P}.(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\, e^{\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})},$$

die nur in $\mathfrak{p}$, und zwar zur ersten Ordnung verschwindet, ohne irgendwie unendlich zu werden; vorausgesetzt ist dabei, daß keiner der Punkte $o_1, \ldots, o_{n\nu}$ mit $\mathfrak{p}$ oder den Nullpunkten von (xz) zusammenfällt. Es liegt nahe, für $\varphi(\mathfrak{o})$ Wurzelformen, oder Formen 1. Gattung oder, falls sie existiert, eine Verzweigungsform zu nehmen.

Aber das ist, wie gesagt, nur eine scheinbare Verallgemeinerung unserer früheren Ausdrücke der Primform. Denn man kann stets zu $\varphi(\mathfrak{o})$ eine ganze algebraische (sogar rationale) Form νter Dimension $\psi(\mathfrak{o})$ auf unendlich viele Weisen so bestimmen, daß $\psi(\mathfrak{o})$ mit $\varphi(\mathfrak{o})$ keinen Nullpunkt gemeinsam hat. Breitet man nun den vorliegenden Funktionenkörper über $\xi = \frac{\varphi(\mathfrak{o})}{\psi(\mathfrak{o})}$ als unabhängiger Veränderlicher aus, so ist obiges $\pi_\varphi(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ im Wesentlichen die Primform auf der zu ξ gehörigen Riemann'schen Fläche im Sinne der vorangegangenen Untersuchung.

V.

Andere Art von Primformen.

Während die bisher abgeleiteten Ausdrücke der Primform im Wesentlichen aus $e^{\mathfrak{R}_z(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})}$ durch Kompensation der Unstetigkeiten in den Nullpunkten von (xz) entstanden, möchten wir schließlich noch den Spezialfall besprechen, wo diese Unstetigkeiten nach $\mathfrak{p}$ und

den dazu konjugierten Punkten fallen, worauf schon in I kurz hingewiesen wurde. Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die Nullpunkte von (xy), und $\mathfrak{p}$ einer von ihnen, für den die Primform zu bilden ist. Dann ist

$$1)\qquad \varrho(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}_*(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\mathfrak{R}_*(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}_\nu)$$

ein Integral mit folgenden Unstetigkeiten:

$$2)\qquad \text{in } \mathfrak{p}:\quad \varrho(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = ln(xy) - \frac{1}{n}ln(xy) + f.c$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)ln(xy) + f.c,$$

3) in den $n-1$ mit $\mathfrak{p}$ konjugierten Punkten:

$$\varrho(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = -\frac{1}{n}ln(xy) + f.c.$$

In den Nullpunkten von (xz) ist es stetig.

Folglich ist

$$4)\qquad (\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xy)}\,e^{\varrho(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})}$$

eine Primform, die nirgends unendlich wird und in $\mathfrak{p}$ zur ersten Ordnung verschwindet. Sie verhält sich so, als hätte man in der Primform

$$\mathfrak{P}_*(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \sqrt[n]{(xz)}\,e^{\mathfrak{R}_*(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})}$$

die Veränderliche $z_1 : z_2$ mit $y_1 : y_2$, also die Punkte $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ zusammenfallen lassen. Doch wäre dazu, wie der Ausdruck für $\mathfrak{R}_*(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ lehrt [II, (5), (6)], ein Grenzübergang nötig gewesen, den wir durch die obige Darstellung vermieden haben. Der Ausdruck, der sich aus II, (5), (6) für das Integral $\varrho(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ ergiebt, ist überaus durchsichtig:

$$5)\qquad \varrho(\mathfrak{o}|\mathfrak{p}) = \int\sum_{\nu=2}^{\nu=n}\left(\varepsilon_\nu(\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\,e_\nu(y)\right)\left(\frac{(xz)}{(yz)}\right)^{[\varepsilon_\nu]}\bar{\varepsilon}_\nu(\mathfrak{o})\,\frac{(yz)(xdx)}{(yx)(xz)}$$

und läßt sich leicht noch vereinfachen, worauf wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

Die Primform $(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ scheidet nur an den Querschnitten $b_1, \ldots, b_p$ Multiplikatoren aus; es wird nicht nötig sein, sie anzugeben. Dagegen möge noch die Beziehung zwischen $(\mathfrak{o}|\mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{p}|\mathfrak{o})$ untersucht werden. Zu dem Zwecke berechnen wir:

$$\int_{(T')} \varrho(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})\, d_0\, \varrho(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}').$$

Man findet

6) $$\varrho(\mathfrak{p}'\,|\,\mathfrak{p}) - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varrho(\mathfrak{p}_\nu'\,|\,\mathfrak{p}) = \varrho(\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}') - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varrho(\mathfrak{p}_\nu\,|\,\mathfrak{p}'),$$

wo $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_n$ je ein System konjugierter Punkte, $\mathfrak{p}$ irgend ein Punkt des ersten, $\mathfrak{p}'$ irgend einer des zweiten ist. Daraus folgt endlich:

7) $$\frac{(\mathfrak{p}'\,|\,\mathfrak{p})}{\sqrt[n]{(\mathfrak{p}_1'\,|\,\mathfrak{p})(\mathfrak{p}_2'\,|\,\mathfrak{p})\cdots(\mathfrak{p}_n'\,|\,\mathfrak{p})}} = \frac{(\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}')}{\sqrt[n]{(\mathfrak{p}_1\,|\,\mathfrak{p}')(\mathfrak{p}_2\,|\,\mathfrak{p}')\cdots(\mathfrak{p}_n\,|\,\mathfrak{p}')}}.$$

Eine Fülle vollkommen durchsichtiger Darstellungen der Primform entquillt so der Funktion $e^{\mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p})}$. Es wird dadurch die Frage nahe gelegt, durch welche Forderungen man unter dieser unendlichen Menge von Ausdrücken einzelne, besonders ausgezeichnete Formen ausscheiden kann. Sicher wird dabei auch die Art und Weise, wie sich algebraische Funktionen $\tau(\mathfrak{o})$ der Klasse durch die Primform *darstellen* lassen, von Einfluß sein. *Die Darstellung selber aber ergiebt sich einfach aus dem Integral*

$$\int_{(T')} ln\, \tau(\mathfrak{o})\, d_0\, \mathfrak{R}_s(\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}).$$

Straßburg, 19. Dezember 1900.

Ueber atlantischen Palolo.

Von

E. Ehlers.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Februar 1901.

Als atlantischen Palolo hat A. G. Mayer [1]) einen Staurocephalus gregaricus beschrieben, der bei Loggerhead Key, einer der Tortugas-Inseln des Florida-Gebietes, zu gewissen Jahreszeiten in großen Mengen frei schwärmend im Meere erscheint und dabei die Geschlechtsproducte entleert. Die Erscheinung wird eingehend geschildert und es bleibt kein Zweifel, daß es sich hier um Vorgänge handelt, die völlig denen entsprechen, welche seit langem von dem „Palolo" bekannt sind, der bei Samoa und weiterhin im pacificischen Meere in so auffallender Weise auftritt.

Die von Herrn A. G. Mayer mitgetheilten Beobachtungen sind dadurch von großem Interesse, und die Schilderung der Erscheinungsweise der Thiere, so wie die Angaben über die Embryonalentwicklung der Würmer sollen von mir in keiner Weise beanstandet werden. Dagegen ist die Benennung des „atlantischen Palolo" als Staurocephalus atlanticus völlig abzuweisen, und es scheint mir jetzt geboten, damit auch in die Oeffentlichkeit zu treten, seitdem A. E. Verrill [2]), in der Erkenntnis, daß der Wurm nicht in die Gattung Staurocephalus Gr. (rectius Stauronereis Verr.) gehöre, in ihm den Typus einer neuen Gattung sieht, für die er den Namen Mayeria Verr. vorschlägt. Er hätte weiter gehen und dafür eine neue Familie errichten können, die in den Eigenthüm-

1) Bull. Mus. Compar. Zool. Harvard Coll. XXXVI 1900 pg. 1.

2) A. E. Verrill, Additions to the Turbellaria Nemertina and Annelida of the Bermudas. Transact. Connecticut Acad. of Arts and Sciences. Vol. X. Pt. 2. November 1900.

lichkeiten ihrer Gestaltung unter den Borstenwürmern ganz isolirt dastehen würde, in die allerdings auch die Gattung Cirroceros (Clprd) einbezogen werden könnte.

Allein sowohl der Staurocephalus gregarius wie die Mayeria gregarica sind aus der Systematik der Polychaeten zu streichen. Denn die guten Abbildungen, die A. G. Mayer von dem Thiere geliefert hat, zeigen unzweifelhaft, daß Staurocephalus gregaricus die hintere Körperstrecke einer Eunicee ist, und daß sein als Kopfende angesprochenes und in seiner characteristischen Gestaltung für die Begründuug einer neuen Gattung verwertheter Körpertheil das Aftersegment mit den Aftercirren ist. Die Abbildung der Ruder und Borsten weist gleichfalls durchaus auf eine Eunicee. Staurocephalus gregaricus verhält sich zu einer Eunicee wie Cirroceros (Clprd) zu Nereis (L.)[1]).

Diese systematische Richtigstellung erhöht das Interesse an der Mayerschen Beobachtung. Es wird die Frage zu erörtern sein, ob und wie weit der atlantische und pacifische „Palolo" übereinstimmen, sowohl nach der Euniciden-Art, an welcher diese Form der Epitokie im westindischen Meere auftritt, wie nach den örtlichen und zeitlichen Verhältnissen, unter denen die Thiere hier leben. Beide Fragen werden unschwer zu beantworten sein, nachdem durch die Beobachtungen von Friedländer[2]) und Krämer[3]) die Wohnsitze der Eunice viridis (Gray), welche den pacifischen Palolo bildet, bekannt geworden sind. Da es bei Loggerhead-Key Korallenriffe giebt, so würden diese, nach den von Samoa bekannten Verhältnissen, auf das Vorkommen einer Eunicee zu prüfen sein, die den atlantischen Palolo erzeugt. Hier tritt auch das geographische Interesse mit der Frage nach dem Zusammenhang der pacifischen und westindischen Meeresfauna ein.

Mit dieser Klarstellung erledigt sich zum Theil auch die Erwägung, die A. G. Mayer am Schlusse seiner Arbeit ausspricht, ob Staurocephalus gregaricus und Palolo viridis ihre übereinstimmenden Fortpflanzungsweisen unabhängig von einander durch natürliche Zuchtwahl unter ähnlichen Einflüssen erworben, oder ob beide Würmer von einem gemeinsamen weit zurückliegenden Vorfahren abstammen, der derartige Fortpflanzungsweise besessen hat. Sind die Erzeuger des pacifischen und atlantischen Palolo nicht Thiere der gleichen Art, was nicht wahrscheinlich ist, da die ventralen

1) Ehlers, Borstenwürmer 1868 pg. 457.

2) B. Friedländer, über den sogenannten Palolowurm. Biolog. Centralbl. XVIII. 1898. No. 10.

3) A. Krämer, Palolountersuchungen. Biolog. Centralbl. XIX. 1899. No. 1.

Pigmentflecke der Eunice viridis (Gray) von dem atlantischen Palolo nicht erwähnt sind und nicht wohl übersehen sein können, so sind sie höchst wahrscheinlich nah verwandte Arten, für die man an einen weit zurückliegenden gemeinsamen Vorfahren nicht zu denken braucht. Art und Gattung des Erzeugers vom atlantischen Palolo lassen sich nach den bis jetzt darüber vorliegenden Angaben nicht sicher feststellen. Daß die Epitokie in ähnlicher Weise wie bei Lycoriden, Sylliden, Glycriden, Cirratuliden auch bei Euniciden an verschiedenen Arten auftritt, ist nicht unwahrscheinlich; ich habe bereits darauf hingewiesen[1], daß neben der Eunice viridis (Gray) bei Samoa noch eine andere Eunicide Palolo bildet; ihre Segmentreihen ähneln den entleerten Segmenten des atlantischen Palolo, die Mayer abgebildet hat (Pl. I. Fig. 2).

---

1) Ehlers, über Palolo. Nachr. k. Ges. d. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. 1898. pg. 414.